SURGIMIENTO DE LA TEORÍA MATEMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

Oscar Vega-Amaya

"Una historia debe comenzar en algún parte,
pero la historia no tiene principio."
D. G. Kendall

INTRODUCCIÓN

Una gran variedad de experimentos y fenómenos naturales, biológicos, sociales, o combinaciones de éstos, tienen la característica de generar resultados u observaciones que no son susceptibles de predecirse con certeza, esto es, que aún cuando se estudien repetidamente bajo un mismo conjunto de circunstancias no siempre se observa el mismo resultado. Entre ellos podemos citar a los juegos de azar: lanzamientos de dados o monedas, juegos con barajas, ruletas, loterías, etc. Otra familia de ejemplos, también muy conocida, la proporcionan los fenómenos meteorológicos: magnitud, intensidad y extensión de las lluvias; humedad, dirección y velocidad de los vientos; temperaturas máximas y mínimas; y todas sus consecuencias como volúmenes de agua en las presas, magnitud de los daños provocados por inundaciones, sequías, heladas, etc.

A la imposibilidad de predecir con certeza los resultados de un fenómeno se le llama *aleatoreidad* y, naturalmente, a los fenómenos con esta característica se les llama *fenómenos aleatorios*. Los términos *aza*r y *estocástico* también se usan comúnmente para hacer referencia al carácter imprevisible de estos fenómenos. La Probabilidad y la Estadística son las disciplinas que se encargan del estudio del azar desde el punto de vista de las matemáticas: la primera propone modelos para los fenómenos aleatorios y estudia sus consecuencias lógicas, mientras que la segunda nos provee de métodos y técnicas para elegir modelos adecuados de los fenómenos en estudio a partir de información empírica.

Hoy en día, es incuestionable el impacto que la Teoría de Probabilidad ha tenido en el pensamiento científico moderno y su influencia se nota en campos tan diversos como ecología, explotación de recursos renovables y no-renovables, demografía, medicina, comunicaciones, computación, investigación de operaciones, finanzas, economía, actuaría, etc. Sin embargo, la teoría de probabilidad no siempre gozó de un estatus privilegiado y de tanta popularidad entre los científicos; de hecho, a diferencia de otras ramas clásicas de la matemática, su certificación como teoría matemática se da hasta el siglo XX con la axiomatización propuesta por A. N. Kolmogorov en los años treinta. Por otra parte, desde la óptica moderna, su origen podría parecernos más bien modesto y hasta un tanto frívolo: la teoría de probabilidad surge de la necesidad por comprender los juegos de azar, esto es, juegos de apuestas en los que domina fuertemente una componente de incertidumbre. (A lo largo de esta nota, esperamos convencer al lector que este origen ni es modesto ni es más frívolo que las motivaciones actuales de muchas disciplinas científicas.)

La Teoría de Probabilidad tiene una larga historia, y en ella, la huella de científicos de gran talla como Galileo, Fermat, Pascal, Huyguens, Jean y Jacques Bernoulli, Gauss, Laplace, Kolmogorov, Wiener, entre muchos otros. Su desarrollo, como el de cualquier disciplina científica, no se dio por la simple acumulación de avances o resultados parciales; por el contrario, la historia de la probabilidad está llena de paradojas, interpretaciones místicas o ambiguas, agrias disputas entre sus protagonistas, revaloración de conceptos "olvidados", etc. Por ejemplo, después de su axiomatización, la Teoría de Probabilidad experimentó una gran aceptación y una expansión sin precedentes, pero aún continúan las controversias sobre su significado, campo de validez y la posibilidad de axiomáticas alternativas a la de Kolmogorov. Sin entrar en la polémica, veamos algunas opiniones al respecto:

Bertrand Russel (1929): *El concepto de probabilidad es el más importante de la ciencia moderna, especialmente porque* ***nadie tiene la mínima idea de lo que significa****.*

J. L. Doob (1986): *Hasta finales de los años treinta, los probabilistas habían trabajado bajo la desventaja sicológica que representa que su campo de investigación* ***no fuese considerado por sus colegas como una disciplina matemática****, quienes no entendían, por un lado, la insuficiencia de la notación estándar de la época y, por otro, porque habían resucitado conceptos viejos como los de* ***variable aleatoria y esperanza****. Además****, los libros de probabilidad estaban llenos de conceptos no matemáticos****: dados, casas de juego, Pedro y Pablo.*

Bruno de Finetti (1974): *Mi tesis, paradójicamente, y un poco provocativa pero genuina, es simplemente la siguiente:* ***la probabilidad no existe****.*

En esta nota nos restringimos a presentar algunos elementos sobre la prehistoria de la probabilidad con el objetivo de tener una mejor comprensión de una de las contribuciones más importantes en su desarrollo: la solución del famoso Problema de los Puntos, que Pascal y Fermat dan en 1654, y que para muchos autores marca el nacimiento de la Teoría de la Probabilidad.

UN PASEO POR LA PREHISTORIA

Descubrimientos arqueológicos han evidenciado que las primeras nociones probabilísticas aparecieron en tiempos tan remotos que su historia "se pierde en el polvo de la antigüedad" [7]. Por ejemplo, entre los vestigios de las culturas sumeria y asiria se ha encontrado, en proporción muy alta para que sea casualidad, un hueso extraído del talón de animales como las ovejas, ciervos y caballos. Se cree que este hueso, denominado astrágalo o talus, era tallado con el propósito de ser utilizado como dispositivo de azar: los astrágalos, al ser lanzados sobre superficies niveladas, pueden caer en cuatro posiciones distintas, aunque no se tiene la certeza de que fueran utilizados con fines religiosos, de entretenimiento o para ambos propósitos. Lo anterior, que es una evidencia de la existencia de nociones probabilísticas entre los asirios y sumerios, se vuelve una certeza en el caso de la civilización egipcia: algunas pinturas encontradas en las tumbas de los faraones muestran tanto astrágalos como tableros para el registro de los resultados.

En pocas palabras, los astrágalos son, simple y sencillamente, dispositivos precursores de los dados. David [1] señala que aún en tiempos modernos es posible encontrar residuos del uso antiguo de los astrágalos en regiones de Francia, Italia y Grecia, donde los niños practican juegos con astrágalos estilizados y manufacturados en metal. No se sabe con exactitud en qué momento los astrágalos se "suavizaron" para dar origen a los dados, pero alrededor del año 1200 a. de C. estos últimos ya aparecen en diferentes partes del mundo. Una leyenda cuenta que Palamedes, un general aqueo, inventó los dados para entretener a su tropa en el largo y tedioso sitio de Troya.

Los juegos con dados se practicaron ininterrumpidamente desde los tiempos del imperio romano hasta el renacimiento en todos los estratos sociales, aunque poco se sabe de las reglas específicas con la que se jugaban. Uno de estos juegos, denominado "hazard", palabra que en inglés y francés significa riesgo o peligro, fue introducido a Europa con la Tercera Cruzada, y las raíces etimológicas del término provienen de la palabra árabe "al-azar" que significa "dado". Posteriormente, en el "Purgatorio" de Dante, el término ya se ha simplificado a la palabra "azar" y, más tarde, los matemáticos italianos introducen los vocablos "ludo aleae" para referirse a los juegos con dados.

Se ha corroborado que muchas naciones importantes de la antigüedad usaron diversos mecanismos aleatorios en oráculos y ceremonias religiosas, o simplemente como instrumentos para develar la fortuna y destino de los individuos [1, 5]. Al respecto, llama especialmente la atención el antiguo pueblo judío, pues en el Talmud, uno de sus libros sagrados, se describe el uso de un buen número de procedimientos aleatorios con distintos fines. Los judíos, de acuerdo al estudio del Talmud realizado por Hasofer [3], asignaban tareas a los sacerdotes en los templos, distribuían impuestos o dirimían querellas entre individuos o tribus con procedimientos aleatorios basados principalmente en urnas, aunque no exclusivamente. Dos aspectos sobresalen en el uso de urnas: por una parte, proporcionaban un procedimiento justo, equitativo entre los contendientes y, por otra, los resultados de tales procedimientos develaban la voluntad de Dios. Estos aspectos, en principio contradictorios entre sí, subyacen en el procedimiento "moderno" de determinar la proporción desconocida de bolas rojas y negras en una urna por medio de extracciones con reemplazo.

Otra clase importante de experiencias que sin duda alguna contribuyeron en la conformación de una noción de azar es la proporcionada por el tratamiento de información numérica como en los casos de las observaciones astronómicas y los censos. Al parecer, los babilonios fueron los primeros en abordar el problema de estimación de parámetros relacionados a las posiciones de cuerpos celestes; según Plackett [4], los astrónomos babilónicos disponían de una teoría matemática y de procedimientos aritméticos simples para el cálculo de las posiciones del sol, la luna y los planetas en periodos regulares de tiempo. Desgraciadamente, no se conoce la forma exacta en que los parámetros se estimaban a partir de los datos originales. El problema de estimación de parámetros tomó mayor fuerza en siglos posteriores y se convirtió en una fuente importante de desarrollo para la Teoría de Probabilidad, cuyo momento cúspide se alcanzó con las contribuciones de Gauss, Legendre y Laplace.

En cuanto a los censos, su realización en la antigüedad está bien documentada [7]. Se sabe que el Emperador Augusto (27 a. de C. – 17 d. de C.) realizaba censos en cada territorio recién conquistado. William “El Normando” (1027-1087), después de conquistar Inglaterra en el año 1066, ordenó la realización de un estudio económico exhaustivo y la organización de una lista con el propósito de establecer procedimientos adecuados para la determinación de impuestos. La lista, conocida como “Doomsday list”, contiene información detallada sobre la realeza, la Iglesia, la extensión y riqueza de los feudos, tamaño de los rebaños de vacunos, así como un registro de la población por ocupación y otras categorías. Crónicas rusas del siglo X también hacen referencia a la recolección de información estadística, mientras que en Venecia en los años 1268 y 1296 se promulgaron decretos que obligaban a los principales señores feudales a la realización de inventarios agrícolas.

Otra fuente de experiencias la proporcionaron las compañías de seguros, las cuales hicieron su aparición por primera vez en el siglo XV en Italia y Holanda. Inicialmente estas compañías aseguraban el transporte de bienes por vías marítimas y posteriormente ampliaron su cobertura a envíos por rutas a través de continentes, ríos y lagos. Para fijar las primas de seguro, estas compañías evaluaban los riesgos a los que estaban sometidos los envíos y, como resulta natural, a un riesgo mayor le asignaban una prima mayor; de hecho, la prima para envíos marítimos oscilaba entre el 12% y 15% del valor de los bienes asegurados, mientras que para los envíos continentales la prima variaba entre el 6% y el 8%.

En resumen, hacia finales del siglo XV existía un campo fértil, abonado por una variedad de experiencias, que hacía plausible el surgimiento de una noción más o menos precisa de azar y la posibilidad de evaluarlo, esto es, de proponer un cálculo de probabilidades. Estas experiencias encontraron en los juegos de azar (juegos con dados) un “modelo” adecuado para su estudio, pues en él se “abstraía” el rasgo común a todas ellas que es la imposibilidad de hacer predicciones con certeza, y a la vez permitía, por la simplicidad del modelo mismo, un cálculo de probabilidades.

El primer libro que se escribió sobre juegos de azar es *“Liber de Ludo Aleae”* de Girolamo Cardano (1501-1576), el cual se publicó en 1663--casi cien años después de la muerte de su autor. Posteriormente, Galileo (1564-1642), quien aparentemente no tenía conocimiento del trabajo de Cardano, se ocupó de los juegos de azar en *“Sopra le Scoperte dei Dadi”*, obra que fue publicada hasta 1718. Tal vez la publicación en extremo tardía del “*Liber*” explique parcialmente el interés de Galileo por problemas que ya habían sido resueltos previamente por Cardano. De cualquier manera, en ambos trabajos ya aparecen de forma definida los elementos que constituyen el enfoque que actualmente conocemos como Enfoque Clásico de la Probabilidad.

Específicamente, las contribuciones de Cardano y Galileo a la Teoría de Probabilidad son las siguientes: (a) establecen la noción de probabilidad de un evento A como la proporción de resultados (equiprobables) favorables a A respecto al número total de resultados posibles; (b) relacionan problemas combinatorios y juegos de azar; (c) en el "*Liber*", Cardano discute las nociones de juego justo y de regularidad estadística; (d) Galileo utiliza argumentos probabilísticos en el estudio de errores en observaciones astronómicas.

La formulación moderna del Enfoque Clásico de la Probabilidad es la siguiente:

Enfoque Clásico de la Probabilidad
1. Consideremos un experimento o fenómeno aleatorio que admite un conjunto finito de resultados $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
2. Los resultados del experimento son equiprobables, es decir, $$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \cdots = P(x_n) = \frac{1}{n}.$$
3. Si A es un evento relacionado al experimento, entonces $$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# A}{n}.$$

Desde la perspectiva actual, el Enfoque Clásico puede parecernos muy claro y demasiado simple como para que se le considere una contribución importante; sin embargo, grandes científicos y matemáticos dieron respuestas incorrectas a problemas de juegos de azar, lo cual evidencia que el Enfoque Clásico ni es simple ni obvio. Entre estas personalidades podemos mencionar a Niccolo Tartaglia (1499-1557), a quien debemos entre otras cosas la fórmula para obtener soluciones de ecuaciones cúbicas; a G. W. Leibniz (1646-1716), cofundador del Cálculo Diferencial; a Jean d´Alembert (1717-1783), uno de los principales promotores de la Enciclopedia Francesa.

Algunos autores atribuyen, errónea e injustamente, el Enfoque Clásico al matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827) debido a que dio amplia divulgación de este enfoque en su obra *"Théorie Analitique des Probabilités"*, publicada en 1812. Es paradójico, sin embargo, que la "*Théorie Analitique*" haya sido rechazada inicialmente por ser poco asequible; por ejemplo, Augusto de Morgan se refirió a ella con las siguientes palabras: "Con mucho, el trabajo matemático más difícil con el que me he encontrado nunca". Este rechazo lleva a Laplace a escribir su *"Essai Philosophique des Probabilités"* con el propósito de dar una introducción no técnica de las leyes del azar. En esencia, para Laplace, la teoría de probabilidades es un cálculo útil para asignar un "grado de racional creencia" a las proposiciones sobre el azar, teniendo como herramientas básicas la teoría de permutaciones y combinaciones.

EL PROBLEMA DE LOS PUNTOS

En el año de 1654, Pascal (1623-1662) y Fermat (1601-1665) establecen comunicación epistolar (cuatro cartas en total) en la que discuten y resuelven el famoso Problema de los Puntos, también conocido como Problema de las Apuestas. Este problema ya había sido estudiado por matemáticos italianos en el siglo anterior pero las soluciones que se proponían eran poco satisfactorias y controversiales, a tal grado que se le consideraba una paradoja. El impacto que provocaron las soluciones de Pascal y Fermat fue tan profundo, que para muchos historiadores 1654 es el año del nacimiento de la Teoría de Probabilidad, mientras que los progresos previos solamente son prehistoria. (Se señala a menudo que Laplace dió el crédito de la fundación de la Teoría de Probabilidad a Fermat y Pascal por ser franceses.)

El origen del Problema de los Puntos es incierto, pero ya se hace referencia al mismo en un manuscrito italiano del año 1380, aunque se cree que es de origen árabe o que se introdujo a Italia en textos árabes. Este problema forma parte de una gran familia de "problemas de división" que preocupaba a la emergente clase de mercaderes, en los siglos XV y XVI, en torno al problema de equidad en tratos comerciales.

Fra Luca dal Borgo (1445-1514), también conocido como Pacioli, era un profesor itinerante de matemáticas, ampliamente conocido en Italia. En su obra *"Summa Arithmetica, Geometria, Proportioni"*, publicada en 1494, aborda la siguiente versión del problema de los puntos:

A y B participan en un juego de "balla" (presumiblemente un juego de pelota) y acuerdan que el juego termine hasta que alguno de ellos gane 6 rondas. El juego se suspende cuando A tiene 5 rondas a su favor y B solo tiene 3. ¿Cómo debe distribuirse la apuesta?

Es obvio que al jugador A debe corresponderle una parte mayor, ¿ pero exactamente cuál? Pacioli propone que la apuesta se distribuya de acuerdo a la proporción de las rondas ganadas por los jugadores, es decir, en proporción 5:3.

Tartaglia (1499-1557) también aborda el Problema de los Puntos, entre otros problemas combinatorios y de probabilidad, en su trabajo *"Trattato Generale di Numeri e Misuri"* publicado en 1556. En relación con el Problema de los Puntos, Tartaglia señala que la regla que Pacioli propone "ni es buena ni conciliadora, pues si por azar, el jugador A tiene una ronda a su favor y B ninguna, el primero debe tomar toda la apuesta, lo cual obviamente no tiene sentido". Luego afirma que "la solución de este problema es más bien de carácter judicial que matemático, de manera que cualquiera que sea el procedimiento para la distribución siempre habrá motivos para litigio". Posteriormente propone soluciones a los siguientes problemas, que en su opinión son las menos controversiales:

Problema I. En un juego pactado a 60 puntos, A ha ganado 10 y B ninguno. ¿Cómo debería distribuirse la apuesta si cada jugador apuesta 22 ducados?

La solución que Tartaglia propone es la siguiente: puesto que los puntos que A tiene son 1/6 de los requeridos para ganar el juego, debe tomar 22/6 de la cantidad aportada por el jugador B; en consecuencia, al jugador A le corresponden en total 22+22/6, es decir, 25 2/3 ducados.

Problema II. Bajo las mismas condiciones del juego anterior, A tiene 50 puntos y B tiene 30 puntos. ¿Cómo debería distribuirse la apuesta?

Para esta situación, Tartaglia considera la diferencia de los puntos que tienen A y B, esto es, 50-30=20 puntos, y propone que A tome 20/60 =1/3 de la aportación de B. Entonces, al jugador A le corresponden en total 22+22/3=29 1/3 ducados.

Las objeciones al procedimiento de Tartaglia saltan a la vista. Por ejemplo, si A tiene 50 puntos y B tiene 40, de acuerdo a Tartaglia al primero le corresponden 25 ducados con 2/3, la misma cantidad que en el Problema I, lo cual es objetable pues A “está a punto” de llevarse el monto total de la apuesta, mientras que en la situación del Problema I, el juego apenas empieza y está lejos de decidirse.

Ambas soluciones, la de Pacioli y la de Tartaglia, son incorrectas; el error consiste en que los procedimientos se centran en los puntos que han obtenido los participantes y no toman en cuenta las posibilidades (probabilidades) que tienen de ganar. En resumen, la fuente de confusiones y errores proviene de abordar el Problema de los Puntos como un problema de “aritmética combinatoria” y de no relacionarlo con el emergente cálculo de probabilidades. La contribución de Pascal y Fermat fue notar la relación entre el Problema de los Puntos y los juegos de azar.

UN GRAN MOMENTO EN LA HISTORIA DE LA PROBABILIDAD

El Caballero de Méré (1607-1684), hombre culto e influyente en la corte de Luis XIV, conoció y mantuvo correspondencia con muchos científicos de la época, incluidos entre ellos Pascal, Fermat y Huygens. En 1654, el Caballero de Méré plantea a Pascal el Problema de los Puntos, el cual, se supone, dio origen a la correspondencia (cuatro cartas) entre Fermat y Pascal.

Pascal, en su carta dirigida a Fermat con fecha 29 de julio de 1654, considera el siguiente caso del Problema de los Puntos:

Dos jugadores han pactado el juego a tres rondas y cada uno apuesta 32 pistolas; el primero ha ganado dos veces y el segundo solamente una vez.

La argumentación de Pascal para encontrar la distribución justa de la apuesta es la siguiente:

“... si ellos juegan otra ronda y el primero gana, este se lleva toda la apuesta, esto es, las 64 pistolas; si el otro gana, entonces cada uno tiene dos rondas a su favor, en cuyo caso, si desean parar el juego, cada uno deberá tomar su propia apuesta, esto decir, 32 pistolas.

Entonces, si el primer jugador gana, este se queda con las 64 pistolas, si pierde se queda con 32 solamente. Luego, si ellos no desean correr el riesgo de una última ronda y desean separarse del juego, el primer jugador argumentaría lo siguiente: Estoy convencido que me corresponden 32 pistolas, aún cuando pierda la ronda, ellas me pertenecen; con relación a las otras 32, existen las mismas posibilidades de que sean para usted como para mí. Entonces dividamos estas 32 pistolas en partes iguales y deme una de ellas, así como las 32 que de seguro son mías.”

En resumen, al primer jugador le corresponden 48 pistolas y al segundo 16; en otras palabras, Pascal propone que la apuesta se divida de acuerdo a las probabilidades que tendrían los jugadores de ganar en caso de que el juego continuara.

En la misma carta, Pascal encuentra la distribución justa de la apuesta para otros casos usando el mismo tipo de argumentos. Es impactante la simplicidad de sus argumentos, pero son poco adecuados para usarse en casos más complicados.

La carta original de Fermat, en la que se supone describe su método de solución, se extravió; sin embargo, sus argumentos se han podido reconstruir de una carta que Pascal envió a Fermat el 24 de agosto de 1654. El problema que Fermat se plantea es el siguiente:

Dos individuos, A y B, que participan en una serie de juegos se encuentran en la situación de que el primero necesita ganar dos juegos y el segundo tres para ganar la apuesta; ¿cómo podemos encontrar la distribución justa de la apuesta?

Es interesante notar que en la formulación del problema, Fermat ya no hace referencia a los juegos ganados que tiene cada individuo sino a la cantidad de juegos que le falta a cada uno para llevarse la apuesta completa. La solución de Fermat es la siguiente: El juego puede continuarse a lo más en cuatro rondas. ¿Cuáles son los resultados posibles para estas cuatro rondas? Indiquemos con el símbolo “+” las victorias de A y con el símbolo “-” las victorias de B. Existen 16 resultados posibles, los cuales se describen en siguiente tabla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-
+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	-
+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-
+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-

De los 16 resultados posibles, las primeros 11 favorecen a A y los restantes a B. En consecuencia, al jugador A le corresponden 11/16 de la apuesta y a B le corresponden 5/16. Es decir, la distribución justa de la apuesta es 11:5.
Posteriormente, Pascal da una solución general al Problema de los Puntos para juegos en los que participan dos personas, apoyándose en resultados sobre el triángulo aritmético que había obtenido en 1653. Así pues, tenemos que Pascal dio dos soluciones al Problema de los Puntos: una para casos particulares y otra general, que en su opinión diferían de la

solución de Fermat. En perspectiva, podemos afirmar que en esencia estos métodos coinciden.

La siguiente contribución importante para la conformación de la Teoría de la Probabilidad se debe a Christiaan Huygens (1629-1695) quien visitó Francia en 1655 atraído fuertemente por las investigaciones recientes de Pascal y Fermat con relación a una "nueva clase de problemas", entre ellos, el Problema de los Puntos. Huygens no tuvo conocimiento de las soluciones y los procedimientos que usaron Pascal y Fermat en el Problema de los Puntos, pero se decidió a estudiarlos por su propia cuenta. Los resultados de sus reflexiones dieron nacimiento al tratado *"De Ratiociniis de Ludo Aleae"* que se publicó en 1657. En este trabajo Huygens resuelve el Problema de los Puntos de forma general con un método diferente a los empleados por Pascal y Fermat, introduciendo el primer concepto que distingue a la Teoría de Probabilidad de las otras ramas de la matemática: el concepto de valor esperado o esperanza matemática.

REFERENCIAS

[1] F. N. David (1955). *Dicing and gaming (a note on the history of probability).* Biometrika 42, pp. 1-15.

[2] I. Hacking (1995). *El Surgimiento de la Probabilidad*, Editorial Gedisa, Barcelona, España.

[3] A. M. Hasofer (1967). *Random mechanism in talmudic literature.* Biometrika 54, pp. 316-321.

[4] M. Kendall (1956). *The beginnings of probability calculus*, Biometrika 43, pp. 1-14.

[5] M. Kendall (1961). *The book of fates*, Biometrika 48, pp. 220-222.

[6] E. S. Pearson and M. Kendall (Eds.) (1970). *Studies in the History of Statistics and Probability*, Vol. I, Charles Griffin & Company Limited, London.

[7] Maistrov. L. E. (1974). *Probability Theory: A Historical Skecht.* Academic Press, New York and London.

[8] R. L. Plackett (1958). *The principle of the arithmetic mean.* Biometrika 45, pp. 515-518.