HISTORIA DE LOS LOGARITMOS

M.O. Francisco Javier Tapia Moreno

MARCO HISTÓRICO

El paso de la Edad Media a los tiempos modernos estuvo marcado por transformaciones cuyos resultados generaron un nuevo estilo de vida. A fines del siglo XV, con la decadencia del feudalismo en Europa, aumenta el poder de una nueva clase social, la burguesía. Ésta comienza a otorgar préstamos a interés, condenados hasta ese entonces como usura. El advenimiento del capitalismo, que estimula la acumulación de riquezas y justifica el lucro, se ve afianzado, además, por los grandes descubrimientos geográficos, que permiten a algunos puertos europeos convertirse en pequeñas capitales financieras y bancarias. Son tiempos de grandes cambios culturales y, sobre todo, de un apasionado retorno a las fuentes antiguas. En cuanto a la ciencia, se origina un proceso de secularización de la misma, donde el científico es generalmente el burgués. El hombre comienza a observar la naturaleza, a experimentar, a usar su razón con verdadero espíritu de investigación. La Matemática, prácticamente inactiva en Europa desde el siglo IV d.C. en que murieron Pappus y Diofanto, también reaparece en esta época. Afortunadamente, los árabes, que habían traducido los antiguos manuscritos griegos, fueron durante más de medio milenio los leales guardianes de aquellos conocimientos, a los que agregaron sus propios descubrimientos.

Italia abre el camino con Scipio Ferro (1465-1526), Niccolo Fontana -apodado Tartaglia- (1500-1557) y Girolamo Cardano (1501-1576). En Alemania surgen Stifel, Durero y Copérnico. La escena se traslada nuevamente a Italia con Galileo Galilei (1564-1642). Vive en esta época también el gran astrónomo alemán Johann Kepler (1571-1630). En la última mitad de siglo XVI Francia produce a François Viète, Escocia a John Napier y en Suiza nace Jobst Burgi.

CAUSAS DEL DESCUBRIMIENTO

A partir del siglo XVI, los cálculos que se precisaban hacer, debido principalmente a la expansión comercial y al perfeccionamiento de las técnicas de navegación, eran de tal magnitud que surgía la necesidad de encontrar algoritmos menos laboriosos que los utilizados hasta entonces, es decir, algoritmos de la multiplicación, de la división, etc.

El descubrimiento de los logaritmos no se produjo aisladamente, por un único proceso. Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto. Ambos caminos inspiraron respectivamente a John Napier y a Jobst Bürgi en el descubrimiento de los logaritmos.

Henry Briggs, quien fue el primero que hizo las tablas logarítmicas en base 10, en el año 1631, en su obra *Logarithmall Arithmetike*, explica el objetivo de la invención de los logaritmos: "Los logaritmos son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de aritmética y geometría... Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad... En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino también de astronomía."

PRECURSORES: ARQUÍMEDES Y STIFEL

Los orígenes del descubrimiento, o invención, de los logaritmos se remontan hasta Arquímedes, en la comparación de las sucesiones aritméticas con las geométricas. Para comprender tal comparación escribamos, por ejemplo, las siguientes dos sucesiones:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

A los números de la primera sucesión, que es aritmética, los llamaremos *logaritmos*; a los de la segunda sucesión (la de abajo), que es geométrica, los llamaremos *antilogaritmos*.

La regla de Arquímedes, según expresa Hoeben, dice que "*para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado*".

Esta comparación de dos sucesiones vuelve a aparecer en el siglo XVI, en los trabajos de un matemático alemán, Miguel Stifel (1487-1567), quien publicó en Nuremberg su *"Arithmetica integra"* en el año 1544. En esta obra se encuentra por primera vez el cálculo con potencias de exponente racional cualquiera y, en particular, la regla de la multiplicación: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, para todos los números racionales *n, m*.

Stifel da también la primera tabla de logaritmos que existe, aunque en forma muy rudimentaria. Contiene sólo los números enteros desde -3 hasta 6, y las correspondientes potencias de 2:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

A los números de la sucesión superior los denominó *exponentes.*

Pero para hacer realmente aplicables los logaritmos al cálculo numérico, le faltaba a Stifel todavía un medio auxiliar importante, las fracciones decimales; y sólo cuando se popularizaron éstas, después del año 1600, surgió la posibilidad de construir verdaderas tablas logarítmicas.

En una parte de su libro, Stifel hace la siguiente observación: "Se podría escribir todo un libro nuevo sobre las propiedades maravillosas de esos números, pero debo ponerme coto a mí mismo en este punto y pasar de largo con los ojos cerrados". Más adelante agrega: "La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquélla corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo, potenciación, en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada".

Por ejemplo, si se tuviera que multiplicar 2 por 16, sólo se tendría que sumar los números de la sucesión aritmética que se hallan encima de éstos, es decir, 1 y 4, obteniéndose 5. Debajo de éste encontramos el número 32 de la sucesión geométrica, que es el resultado de la multiplicación. Para efectuar una división se realiza una sustracción. Así, 256 dividido 32, se hace 8 – 5 = 3, debajo del cual se ve el número 8, que es el resultado de la división. La potenciación, llamada por Stifel "*multiplicación por sí mismo*", se efectúa por la suma "consigo mismo" del correspondiente número aritmético. Es decir, para hacer 64 se suma tres veces el número 2, que es el correspondiente en la sucesión aritmética al número 4. O sea, 2+2+2 = 6 o $2 \cdot 3 = 6$, debajo del cual encontramos el 64, lo que significa que este número es el cubo de 4. La radicación se obtiene mediante la división. Así, la raíz cúbica de 64, se obtiene dividiendo al número 6, que es el correspondiente número aritmético de 64, por 3. Es decir, $6 \div 3 = 2$, debajo del cual encontramos el 4.

JOHN NAPIER

Durante la última parte del siglo XVI, Dinamarca llegó a ser un importante centro de estudios sobre problemas relacionados con la navegación. Dos matemáticos daneses, Wittich y Clavius (cuya obra *De Astrolabio* se publicó en 1593), sugirieron la aplicación de las tablas trigonométricas para abreviar los cálculos, mediante el uso de las fórmulas del seno y del coseno de la suma de dos ángulos. Este recurso de cálculo sirvió probablemente de inspiración al escocés John Napier (1550-1617), cuyo nombre latinizado es Neper, en la deducción de un método sencillo para multiplicar senos de ángulos por un proceso de adición directa. El descubrimiento de Napier fue ávidamente acogido por los astrónomos Tycho Brahe y Johann Kepler. En el año 1614 en Edimburgo aparecen sus *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, o “descripción de la maravillosa regla de los logaritmos”, es decir, las primeras tablas de logaritmos; sin embargo, no se describe aquí la forma en que fueron construidas. A inicios de 1619, dos años después de su muerte, aparece el procedimiento utilizado, bajo el título *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, es decir, “construcción de la maravillosa regla de los logaritmos”.

Napier fue el inventor de la palabra logaritmo (del griego "logos", razón, y "arithmos", número: número de razones, pues en el caso de ser el logaritmo un número entero, es el número de factores que se toman de la razón dada (base) para obtener el antilogaritmo. Además, introdujo los logaritmos mediante una concepción cinemática, cuyo origen, según él se imaginaba, era un movimiento sincrónico, una especie de fluctuación entre dos sucesiones. A continuación se describe esta concepción.

Sean un segmento *AB* y una semirrecta *HF*. Supongamos que los móviles *c* e *i* parten simultáneamente de *A* y *H* con la misma velocidad inicial y en dirección a *B* y *F*, respectivamente (ver Figura 1).

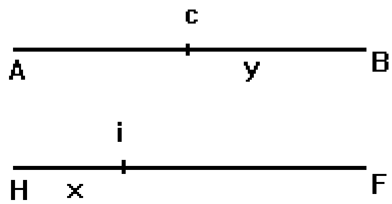

Figura 1.

Supongamos que el móvil *c* tiene una velocidad numérica igual a la distancia *y*; además, el móvil *i* se desplaza con una velocidad uniforme numéricamente igual a su velocidad inicial. Napier definió la longitud *x* como el logaritmo de *y*.

Recurriendo al cálculo diferencial e integral podemos escribir:

$$y = \text{Velocidad de } c = \frac{-\,dy}{dt}$$

$$\text{Velocidad de } c \text{ en } A = \text{Velocidad de } c \text{ en } i = \frac{dx}{dt},$$

por lo cual
$$\frac{dy}{y} = -dt \qquad (1)$$

y, además,
$$dt = \frac{dx}{\text{velocidad de } c \text{ en } A} \qquad (2)$$

Napier toma el valor 10^7 para la velocidad de *c* en *A*, con el objeto de eliminar la dificultad surgida al utilizar fracciones.

Partiendo de (1) e integrando, tendremos:

$$\ln y = -t + K$$

donde *K* es un número real.

Si $t = 0$, entonces $K = \ln 10^7$ (ya que longitud de *AB* es 10^7). Así,

$$\ln y = -t + \ln 10^7 \qquad (3)$$

Ahora bien, de (2), $10^7 dt = dx$, integrando se tiene que, $x = 10^{7t}$. Por lo tanto, el logaritmo que Napier define es:

$$\begin{aligned} x &= 10^7 t \\ &= 10^7 \left(\ln 10^7 - \ln y\right), \text{ por } (3), \\ &= 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right). \end{aligned}$$

Esto es,

$$10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right).$$

JOBST BÜRGI

El descubrimiento de los logaritmos es un claro ejemplo de lo habituales que resultan las duplicidades en las innovaciones. Hoy se sabe que el relojero y constructor de instrumentos suizo Jobst Bürgi (1552-1632), se hallaba en posesión de este conocimiento antes que Napier, incluso se afirma que concibió la idea del logaritmo ya en el año 1586, estimulado por las observaciones antes mencionadas de Stifel, y en el *Libro de cálculo* de Simón Jacob (1565). Pero, según se dice, fue por falta material de tiempo que no lo dio a conocer, motivo por el cual el astrónomo Kepler pudo echarle en cara el hecho de "haber dejado en el desamparo al hijo de su espíritu, en vez de educarlo para la publicidad". Se dice que así procedió, pues, como se le decía en latín, era un "secretorum suorum custos" (guardián de sus secretos).

Hubo que esperar hasta el año 1620 para que Bürgi publicara en Praga sus tablas logarítmicas bajo el título *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen*. Estas tablas se publicaron en circunstancias exteriores desfavorables, pues el 8 de noviembre de 1620 fue tomada Praga, y permanecieron desconocidas. Bürgi vió que el valor práctico de las sucesiones de Stifel es aplicable con provecho en el caso de que sus respectivos términos se aproximen uno al otro, lo más posible. A la vez observó que las propiedades logarítmicas no se extendían solamente sobre la sucesión de potencias de base dos, sino sobre sucesiones con cualquier razón racional *q*.

BASES DE NAPIER Y BÜRGI

Existe la creencia general de que Napier ha sido el inventor de los logaritmos naturales, cuya base es el número e. Pero esto es absolutamente falso. Es sabido que Bürgi utilizó como base, aunque él mismo no lo supiera, el número

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2.7184593\ldots$$

que está muy cercano al verdadero valor de e = 2.718281828....

Bürgi partió de una progresión aritmética de primer término 0 y razón 10 y último término 32,000. Estos números, que serían nuestros logaritmos, los denomina *números rojos*. La progresión geométrica correspondiente empieza con el número 10^8 y la razón (que elige, al igual que Napier, cercana a la unidad, para lograr de este modo que los sucesivos términos de la progresión geométrica difieran muy poco entre sí) es $1+10^{-4}$. Estos son sus *números negros*. La tabla es de doble entrada, entrando con los números rojos, de manera que Bürgi construyó una tabla de antilogaritmos. Para poder comprobar el surgimiento del número *e* en el sistema de Bürgi, debemos multiplicar a cada término de la progresión aritmética por 10^{-5}. Si elegimos un término rojo, por ejemplo 10, y su correspondiente negro, $\left(1+10^{-4}\right)\left(10^8\right)$ podemos efectuar la siguiente deducción:

$$
\begin{aligned}
10^{-4} &= \log_a \left(1+10^{-4}\right)\left(10^8\right) \\
&= \log_a \left(1+10^{-4}\right) + \log_a \left(10^8\right) \\
&= \log_a \left(1+10^{-4}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$a^{10^{-4}} = \left(1+10^{-4}\right)$$

y de aquí,

$$a = \left(1+10^{-4}\right)^{10^4} \cong e = 2.718281828$$

La tabla de Napier no daba los logaritmos de la sucesión de los números naturales, sino de los valores de los senos de 0º a 90º; en ella, para obviar los números negativos y para que los términos de su progresión geométrica fueran potencias enteras muy próximas a un seno dado, eligió como razón un número próximo a la unidad, pero menor que ella: 0.9999999.

En realidad, Napier no habla de base alguna, pero la que se deduce de sus cálculos se aproxima mucho a la expresión

$$\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{3}\cdot 10^{-14}\right)$$

que es algo menor que la recíproca del logaritmo natural.

Una comparación de los logaritmos de Napier y Bürgi se hace en las tablas siguientes:

	Tabla de Napier
1	$10^7\left(1-10^{-7}\right)$
2	$10^7\left(1-10^{-7}\right)^2$
3	$10^7\left(1-10^{-7}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$
N	$10^7\left(1-10^{-7}\right)^n$
$\vdots$	$\vdots$

	Tabla de Bürgi
10(1)	$10^8\left(1+10^{-4}\right)$
10(2)	$10^8\left(1+10^{-4}\right)^2$
10(3)	$10^8\left(1+10^{-4}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$
$10(n)$	$10^8\left(1+10^{-4}\right)^n$
$\vdots$	$\vdots$

HENRY BRIGGS

Las tablas de Napier, aparecidas en 1614, causaron un gran impacto en toda Europa, pero especialmente en Henry Briggs (1561-1630), profesor de geometría de Oxford. Briggs visitó a Napier en Edimburgo y, después de una discusión, llegaron a la conclusión de que el logaritmo de 1 debía ser igual a 0, mientras que el logaritmo de 10 debía ser igual a 1. Así nacen los logaritmos de "base vulgar" o *logaritmos de Briggs*. La tarea de construir la primera tabla de logaritmos en base 10 fue asumida por Briggs, puesto que Napier no poseía ya fuerzas para emprender un trabajo de esa envergadura.

En SIGMA, El Mundo de las Matemáticas, aparece el siguiente relato del primer encuentro entre el barón de Merchiston, John Napier, y Henry Briggs:

"no podía tener tranquilidad en sí, hasta que no hubiera visto a la noble persona de cuya sola invención éstos eran... Mr. Briggs señala un día determinado para encontrarse en Edimburgo; pero falló en su propósito, de modo que Lord Napier temía que no viniera. Sucedió que un día, cuando John Marr y Lord Napier estaban hablando de Mr. Briggs: 'Ah, John -decía Merchiston-, ahora Mr. Briggs no vendrá', en el mismo instante alguien llama a la puerta; John Marr se apresuró a bajar y resultó ser, para su gran alegría, Mr. Briggs. Conduce a Mr. Briggs a la habitación de Milord, donde estuvieron casi un cuarto de hora, cada uno contemplando al otro con admiración, antes de que se dijera ni una palabra; finalmente, Mr. Briggs comenzó: 'Milord, he emprendido este largo viaje para ver a vuestra persona, y para saber mediante qué mecanismo de inventiva o ingenio pensásteis por primera vez en esta ayuda tan excelente para la astronomía, a saber, los logaritmos. Pero, Milord, me extraña que, habiéndolos descubierto vos, nadie los haya descubierto antes, cuando ahora que los conocemos parece tan fácil.' "

En el año 1617, año de la muerte de Napier, Briggs publicó sus *Logarithmorum chilias prima*, que comprende los logaritmos de los números 1 a 1,000, con una precisión de 14 decimales. En 1624 en su obra *Arithmetica logarithmica*, ya aparece la palabra *característica* (parte entera). La palabra *mantisa* (parte decimal) fue utilizada por primera vez por Wallis en 1693. Las tablas que aparecen en la obra de Briggs contienen los logaritmos decimales de los números 1 a 20,000 y de 90,000 a 100,000, con 14 cifras decimales de precisión.

Existen más de veinte obras sobre este tema publicadas entre 1614 y 1631, incluida una de Adrián Vlacq y E. Decker, quienes en 1628 publicaron en Holanda los logaritmos desde 1 a 100,000, aproximados hasta 10 cifras decimales. Edward Wright (1559-1615) publicó una traducción inglesa del tratado de Napier, aparecido en 1614, en la que se encuentran algunos logaritmos naturales. John Speidell, en una obra titulada *New logarithmes*, publicada en Londres en 1619, reajusta los logaritmos de Napier introduciendo, a partir de las funciones trigonométricas, los logaritmos naturales (de base *e*). El inventor de la "Regla de cálculo", William Oughtred, establece las propiedades

a) $\log\, m\cdot n = \log\, m + \log\, n$

b) $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$

c) $\log x^n = n \log x$

LOGARITMOS Y ANTILOGARITMOS

Como se vio anteriormente, Stifel propuso dos sucesiones: una aritmética (que llamamos logaritmos) y otra geométrica (que llamamos antilogaritmos). Pero esta primitiva tabla de logaritmos y antilogaritmos no es suficiente para poder llevar a cabo multiplicaciones y otras operaciones, a no ser que sea posible ampliarla y completarla de modo que comprenda todos los números cuyo producto se desea obtener. Para distinguir los logaritmos correspondientes a una determinada sucesión geométrica, de los logaritmos correspondientes a otra sucesión geométrica, designamos por *a* la base de la sucesión y escribimos esta *a* como adjetivo matemático en la parte inferior derecha, para señalar qué tablas de logaritmos estamos usando.

El logaritmo de un número *p* en una cierta base *a* es el exponente al que debe elevarse la base *a* para obtener dicho número *p*. Análogamente, si *m* es el logaritmo de *p* en una base *a*, entonces *p* es el antilogaritmo de *m* en dicha base. En símbolos:

$$p = a^m \Rightarrow m = \log_a p$$

o bien,

$$p = \operatorname{antilog}_a m\ .$$

Esta notación permite escribir la regla de la multiplicación en otra forma:

$$q = a^n \Rightarrow n = \log_a q$$

o bien,

$$q = \operatorname{antilog}_a n \, .$$

Entonces,

$$p \cdot q = a^{m+n} \Rightarrow m + n = \log_a p \cdot q \, ,$$

y de aquí,

$$p \cdot q = \operatorname{antilog}_a (m + n) = \operatorname{antilog}_a (\log_a p + \log_a q) \, .$$

Esta conclusión expresa que, en una cierta base, el logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de dichos números en la misma base. Del mismo modo pueden deducirse las reglas conocidas restantes.

TABLAS EN BASE 2

Toda tabla de logaritmos es a la vez tabla de antilogaritmos. Como ejemplo de tabla logarítmica, de tres decimales, podemos escribir la siguiente, basada en la progresión geométrica 2^n, es decir, con base igual a 2:

$n = \log_2 N$	$N = \operatorname{antilog}_2 n$
0	$1 \rightarrow 1.000$
0.5	$\sqrt{2} \rightarrow 1.414$
1	$2 \rightarrow 2.000$
1.5	$\sqrt{2^3} \rightarrow 2.828$
2	$4 \rightarrow 4.000$
2.5	$\sqrt{2^5} \rightarrow 5.657$
3	$8 \rightarrow 8.000$
3.5	$\sqrt{2^7} \rightarrow 11.314$
4	$16 \rightarrow 16.000$
...	... $\rightarrow$ ......

Los números n de la sucesión aritmética son logaritmos, los números N de la sucesión geométrica 2^n son antilogaritmos. Así, $\log_2 2.828 = 1.5$ y $\text{anti}\log_2 1.5 = 2.828$. Si quisiéramos multiplicar, por ejemplo, 2.828×5.657, se procedería del siguiente modo.

La tabla dice:

$$\log_2 2.828 = 1.5 \Rightarrow \text{antilog}_2 1.5 = 2.828$$
$$\log_2 5.657 = 2.5 \Rightarrow \text{antilog}_2 2.5 = 5.657$$

Luego:

$$\begin{aligned} 2.828 \times 5.657 &= \\ &\text{anti}\log_2 (\log_2 2.828 + \log_2 5.657) \\ &= \text{anti}\log_2 (1.5 + 2.5) \\ &= \text{anti}\log_2 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

TABLAS EN BASE 10

Para las aplicaciones prácticas, la base de las tablas logarítmicas es 10, por ser 10 la base de nuestro sistema de numeración. Esto simplifica los cálculos de las tablas logarítmicas por la siguiente razón: siendo 10 la base, los números fundamentales de las tablas están contenidos en las dos sucesiones

Log	-2	-1	0	1	2	3
Antilog	0.01	0.1	1	10	100	1000

Podría hacerse, por ejemplo, el siguiente cálculo:

$$\log_{10} 3.162 = \log_{10} \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = 0.5,$$

es decir,

$$\sqrt{10} \cong 3.162 \Rightarrow \log_{10} 3.162 = 0.5.$$

Si quisiéramos saber, por ejemplo, el $\log_{10} (31.62)$, se procedería de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\log_{10}(31.62)= \\
&\quad = \log_{10}(3.162\times 10) \\
&\quad = \log_{10}(3.162)+\log_{10}(10) \\
&\quad = 0.5+1 \\
&\quad = 1.5
\end{aligned}
$$

De manera similar:

$$
\begin{aligned}
&\log_{10}(316.2)= \\
&= \log_{10}(3.162\times 100) \\
&= \log_{10}(3.162)+\log_{10}100 \\
&= 0.5+2 \\
&= 2.5
\end{aligned}
$$

Es decir, que a pesar de que se altere el lugar del punto decimal en un número, no se modifica en nada el valor de la cantidad que está a la derecha del punto decimal en su logaritmo. Por lo tanto, si tuviéramos los logaritmos de todos los números comprendidos entre 1 y 10, a intervalos suficientemente pequeños, tendríamos todo lo necesario para multiplicar logarítmicamente. Supongamos que necesitáramos multiplicar 1.536×77. Las tablas nos darían:

$$\log_{10}(1.536)=0.1864$$
$$\log_{10}(7.7)=0.8865 \Rightarrow \log_{10}(77)=1.8865$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&1.536\times 77 = \\
&\mathrm{antilog}_{10}(0.1864+1.8865) \\
&= \mathrm{antilog}_{10}(2.0729) \\
&= \mathrm{antilog}_{10}(2+0.0729) \\
&= 10^{2+0.0729} \\
&= 10^{2}\cdot 10^{0.0729} \\
&= 100\cdot \mathrm{antilog}_{10}(0.0729) \\
&= 100(1.183) \\
&= 118.3
\end{aligned}
$$

El resultado de la multiplicación anterior es aproximado, con un error menor de tres centésimas, dado que se han usado tablas con sólo cuatro cifras decimales.

CONSTRUCCIÓN DE UNA TABLA EN BASE 10

Para construir una tabla de logaritmos en una base 10, puede comenzarse por construirse una tabla de antilogaritmos. Por ejemplo:

Antilog	1	2	3	4	5	6	...

Y calcularse sus logaritmos de la forma siguiente:

$$1 = 10^0 \Rightarrow \log_{10} 1 = 0$$

Luego, por multiplicación hallamos: 2^{10}= 1024 que sólo difiere de 1000 en menos del 2.5%,

$$2^{10} \cong 10^3 \Rightarrow 2 \cong 10^{\frac{3}{10}} = 10^{0.3} \Rightarrow \log_{10} 2 \cong 0.3$$

Nuevamente por multiplicación:

$$\begin{aligned} 3^9 &= 19683 \cong 20000 = 2 \cdot 10000 \\ &\cong 10^{0.3} \cdot 10^4 = 10^{4.3} \Rightarrow \\ 3 &\cong 10^{\frac{4.3}{9}} \cong 10^{0.48} \Rightarrow \log_{10} 3 \cong 0.48. \end{aligned}$$

Y así, sucesivamente, obtenemos el siguiente esquema de tabla de logaritmo:

N	log *N*	*N*	log *N*
1	0		
2	0.3	20	1.3
3	0.48	30	1.48
4	0.6	40	1.6
5	0.7	50	1.7
6	0.78	60	1.78
7	0.84	70	1.84
8	0.9	80	1.9
9	0.95	90	1.95
Antilog *n*	*n*	Antilog *n*	*n*

CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE BRIGGS

Briggs, al formar su tabla de logaritmos, escribió una sucesión aritmética cualquiera (logaritmos) cuyo primer término era 1, y una sucesión geométrica (antilogaritmos) cuyo primer término era precisamente la razón o base de esta sucesión. Por ejemplo si la razón es 10:

$n = \log_{10} N$	$N = \text{antilog}_{10} n$
1	10
0.875	$10^{\frac{7}{8}} \cong 7.4980$
0.750	$10^{\frac{3}{4}} \cong 5.6234$
0.625	$10^{\frac{5}{8}} \cong 4.2170$
0.500	$10^{\frac{1}{2}} \cong 3.1623$
0.375	$10^{\frac{3}{8}} \cong 2.3714$
0.250	$10^{\frac{1}{4}} \cong 1.7783$
0.125	$10^{\frac{1}{8}} \cong 1.3385$
0	1

Extrayendo raíces de grado más elevado, podrán hacerse tan pequeños como se desee los intervalos entre los números de la columna de la izquierda (logaritmos).

Es conocida la propiedad por la cual si tomamos tres números consecutivos cualesquiera *a*, *b* y *c* de una sucesión aritmética el segundo de ellos es la media aritmética de los otros dos, es decir $b = \frac{a+c}{2}$. Análogamente, dados tres números consecutivos cualesquiera *A, B, C* de una sucesión geométrica, el segundo de ellos es la media geométrica de los otros dos, es decir: $B = \sqrt{A \cdot C}$.

Utilizando esta propiedad, Briggs convirtió una tabla de antilogaritmos (o sea, que tiene los logaritmos a intervalos regulares, en la columna de la izquierda), en una tabla de logaritmos (que tiene los antilogaritmos a intervalos regulares, en la columna de la izquierda). En la siguiente tabla puede verse una aplicación de este método a las sucesivas aproximaciones del valor del $\log_{10} 5$:

$N = \text{antilog}_{10} n$	$n = \log_{10} N$
A = *1*	$a = 0$
B = *10*	$b = 1$
$C = \sqrt{A \cdot B} \cong 3.162277$	$c = \frac{1}{2}(a + b) = 0.5$
$D = \sqrt{B \cdot C} \cong 5.623413$	$d = \frac{1}{2}(b + c) = 0.75$
$E = \sqrt{C \cdot D} \cong 4.216964$	$e = \frac{1}{2}(c + d) = 0.625$
$F = \sqrt{D \cdot E} \cong 4.869674$	$f = \frac{1}{2}(d + e) = 0.6875$
$G = \sqrt{E \cdot F} \cong 5.232091$	$g = \frac{1}{2}(e + f) = 0.71875$
$H = \sqrt{F \cdot G} \cong 5.048065$	$h = \frac{1}{2}(f + g) = 0.703125$
$I = \sqrt{G \cdot H} \cong 4.958067$	$i = \frac{1}{2}(g + h) = 0.6953125$
$J = \sqrt{H \cdot I} \cong 5.002865$	$j = \frac{1}{2}(h + i) = 0.6992187$

Se evidencia aquí la laboriosidad de hombres como Briggs y Vlacq, que calcularon sus logaritmos con 14 y 10 cifras decimales exactas, respectivamente.

ANALOGÍAS ENTRE LOS SISTEMAS DE BÜRGI Y NAPIER

Con el fin de observar la relación que hay entre ambos sistemas, calculemos, por ejemplo, en el sistema de logaritmos de Bürgi, las potencias correspondientes a dos términos consecutivos de la progresión geométrica de razón 1.0001 = $1+10^{-4}$. Tomemos como exponentes *y*, *y* + 1, con *y* entero:

$$\left(1+10^{-4}\right)^{y} = x, \qquad \left(1+10^{-4}\right)^{y+1} = x + dx$$

Por sustracción, se deduce que

$$\begin{aligned} dx &= x + dx - x \\ &= \left(1+10^{-4}\right)^{y+1} - \left(1+10^{-4}\right)^{y} \\ &= \left(1+10^{-4}\right)^{y} \cdot \left(1+10^{-4} - 1\right) \\ &= x \cdot 10^{-4} \\ &= \frac{x}{10^{4}} \end{aligned}$$

Una vez determinado el valor de *x* correspondiente a un valor de *y*, Bürgi obtiene el que corresponde al siguiente, *y* + 1, por adición a *x* de $\frac{x}{10^4}$.

Con el propósito de completar sus tablas e intercalar términos en sus progresiones, toma las potencias correspondientes a dos exponentes *y*, *y + dy*:

$$x = \left(1+10^{-4}\right)^{y} \qquad x + dx = \left(1+10^{-4}\right)^{y+dy}$$

Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, obtenemos:

$$dx = \left(1+10^{-4}\right)^{y} \cdot \left[\left(1+10^{-4}\right)^{dy} - 1\right] \cong x \cdot dy \cdot 10^{-4}$$

(Nota: Ya Bürgi había detectado esta aproximación: $\left(1+10^{-4}\right)^{dy} \cong 1 + dy \cdot 10^{-4}$. Hoy en día se puede obtener por la aproximación del polinomio de orden 1 de Taylor $f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, de la siguiente manera: Sea $f(x) = x^{dy}$, entonces $f'(x) = dy \cdot x^{dy-1}$. Si tomamos $x_0 = 1$ y $x = 1+10^{-4}$, obtenemos dicha aproximación.)

De la fórmula anterior, obtenemos la expresión más general:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10^4}{x} \qquad (1)$$

Tenemos así, una ecuación de diferencias para el sistema de logaritmos de Bürgi, que éste mismo aplicó para el cálculo de su tabla.

De igual modo se deduce que los logaritmos de Napier satisfacen la ecuación de diferencias

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10^7}{x} \qquad (2)$$

Finalmente podemos observar la íntima relación entre ambos sistemas. Haciendo un cambio de escala, en lugar de *y*, $z = \frac{y}{10^4}$, y tomemos en lugar de *dy* a $dz = \frac{dy}{10^4}$, entonces obtendremos, reemplazando en (1):

$$\frac{dz \cdot 10^4}{dx} = \frac{10^4}{x}$$

de donde

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}.$$

De la misma forma podemos trabajar la ecuación de diferencia de Napier, mediante un cambio de escala, llamemos en lugar de y, $z = \frac{-y}{10^7}$; y tomemos en lugar de dy a $dz = \frac{-dy}{10^7}$, así obtendremos, reemplazando en (2):

$$\frac{dz(-10^7)}{dx} = \frac{-10^7}{x}$$

por lo tanto,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Queda claro que en ambos sistemas llegamos a la misma ecuación de diferencias. Veamos ahora una interpretación geométrica de ambos sistemas.

Si partimos de la ecuación de diferencias

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

obtenemos

$$dy = \frac{dx}{x}. \qquad (3)$$

Tomemos una partición $\{1, h_1, h_2, ..., h_n, x\}$ en el intervalo $[1, x]$ para un x cualquiera. Podemos pensar que dy irá variando para cada valor h_i de la partición, ya que $dy_k = y_k - y_{k-1}$. De (3) obtenemos que $dy_k = \frac{dh}{h}$ (en particular, $dy = dy_k = \frac{dx}{x}$).

Por otra parte, observemos el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y averigüemos el área de cada uno de los "rectángulos inferiores" que dependerá de la partición que hayamos tomado (ver Figura 2).

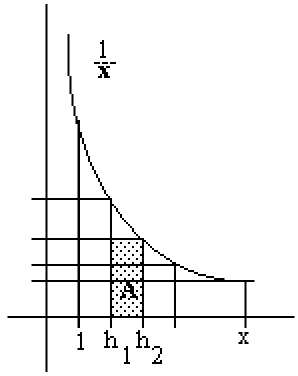

Figura 2.

Por ejemplo,

$$\frac{dh_2}{h_2} = \text{Área del rectángulo inferior } A.$$

En general,

$$\frac{dh}{h} = \text{Área de un rectángulo inferior cualquiera.}$$

Para hallar el área total debemos sumar todos los rectángulos inferiores. De este modo obtenemos: $\sum_{k=1}^{x} \frac{dh}{h}$, pero por ser $\frac{dh}{h} = dy_k$ tendremos que la $\sum_{k=1}^{x} \frac{dh}{h} = \sum_{k=1}^{x} dy_k$.

Definamos $y_0 = 0$ entonces $\sum_{k=1}^{x} dy_k = \sum_{k=1}^{x} (y_k - y_{k-1})$

$$\begin{aligned} &= y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \cdots + y_k - y_{k-1} + y_x - y_k \\ &= y_x - y_0 \\ &= y_x \end{aligned}$$

Pero y_x es y, ya que es éste el que depende de x, por lo tanto obtenemos $y = \sum_{k=1}^{x} \frac{dh}{h}$.

De esta interpretación se llega inmediatamente, como veremos a continuación, a los logaritmos naturales, mediante los conocimientos actuales del cálculo integral.

Pensemos una partición en que $h \to 0$ para que el valor del área de cada rectángulo se aproxime más a la de la zona sombreada y como el intervalo [1, x] es continuo, integramos para calcular el área

$$y = \int_1^x \frac{dh}{h} = \ln h\Big|_1^x = \ln x - \ln 1$$

Pero para poder aceptar esta interpretación del logaritmo debe comprobarse que se cumpla la propiedad fundamental, por la cual el logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores; lo que puede demostrarse muy fácilmente. Este último análisis se corresponde también con el proceso histórico. En el año 1650, gracias a los adelantos en geometría analítica y en el cálculo infinitesimal, pudo llegarse a los resultados anteriores. Con estos descubrimientos, de principios del siglo XVII, se lograron efectuar operaciones que anteriormente ni siquiera podían pensarse.

A inicios del siglo XVIII el gran matemático Leonard Euler descubriría las profundas relaciones entre la función exponencial $ax = b$ y su inversa $x = \log_a b$.

En palabras de Egmont Colerus: *Sin embargo, aún no se sospechaba que el nuevo método calculístico, sobre todo en sus últimos principios constructivos, simultáneamente se transformaría en eje de toda la Matemática infinitesimal. Nadie pensaba aún en que la función logarítmica se habría de transformar en un puente tendido sobre el camino que lleva a la solución de integraciones, aparentemente insolubles. Y menos aún se pensaba en el futuro del mágico número e, para el cálculo de intereses y de probabilidades.*

REFERENCIAS

[1] Arquímides Caballero, Lorenzo Martínez, Jesús Bernardez (1976). *Tablas Matemáticas*. Esfinge, México.
[2] Collette, Jean Paul (1986). *Historia de las Matemáticas I* -México, Siglo XXI ediciones.
[3] Edwards, Charles Henry (1937). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlang, New York, 1979.
[4] Newman, James R. (1994) - *Sigma El Mundo de las Matemáticas* - Barcelona, Grijalbo.