EL DESARROLLO DEL ÁLGEBRA MODERNA

Parte III: El surgimiento del álgebra abstracta

Guillermo Dávila Rascón

Los matemáticos no estudian los objetos, sino las relaciones entre los objetos; por tanto, les es indiferente reemplazar estos objetos por otros, con tal que no cambien las relaciones. La sustancia no les importa, sólo les interesa la forma.

Henri Poincaré[1]

1. INTRODUCCIÓN

Mencionábamos en la segunda parte de estas notas que la contribución de Francisco Vieta (1540-1603) al desarrollo del álgebra fue muy importante, no sólo por haber sido el primero en introducir una notación mucho más adecuada para el análisis algebraico que la de sus predecesores, sino que proveyó al álgebra de un nuevo enfoque: en su trabajo encontramos un nuevo simbolismo para denotar entidades algebraicas, una clara inclinación hacia el análisis como el método del álgebra y una negación de la geometría como su fundamento. Ese método, al cual llamó *logística simbólica*, fue introducido en su *Arte Analítico*, y "... *emplea símbolos o signos para cosas, como, digamos, las letras del alfabeto*" [21, p. 17]; asimismo, en este trabajo Vieta estableció las reglas en las que se basaba su novedoso método. La logística simbólica le permitió a Vieta representar por medio de las letras del alfabeto las variables, e incluso los coeficientes, en una ecuación; esto trajo una ventaja adicional: las operaciones presentes en la resolución de una ecuación se hicieron mucho más visibles y, de esta manera, se pudo dar un paso decisivo hacia la generalización de las diferentes "recetas" que se tenían para resolver ecuaciones algebraicas, lo cual abrió nuevos caminos que le permitirían al álgebra consolidarse, en los dos siglos siguientes, como una rama totalmente independiente dentro de las matemáticas.

Por otra parte, no podemos pasar por alto el gran talento matemático de Vieta pues sus contribuciones a las matemáticas no se limitan sólo a la introducción de un nuevo simbolismo algebraico. De hecho, sus intereses matemáticos eran variados e hizo contribuciones originales en trigonometría, en la solución de ecuaciones por métodos numéricos y en la aplicación del álgebra a la geometría. Sin embargo, una de sus "faltas" fue la de no considerar números negativos como soluciones de ecuaciones, por lo que en este aspecto no siguió a Cardano, para quien era bastante natural trabajar con cantidades negativas como raíces de ecuaciones a las cuales llama "soluciones falsas" e identifica con "débitos"; así, es clara la aceptación, por parte de este último, de los números negativos. Más importante aun, es su reconocimiento de los números imaginarios, aunque como entidades *verdaderamente sofisticadas* (ver la Parte II).

[1] Citado en [15], p. 351.

También es preciso señalar que el simbolismo introducido por Vieta no estaba completamente desarrollado pues era una mezcla de álgebra abreviada con un estilo simbólico; no obstante, fue lo suficientemente flexible como para sentar las bases de la teoría moderna de ecuaciones. En efecto, Vieta considera ecuaciones generales y no casos particulares como lo hicieron Cardano y sus antecesores; además, si bien este último ya había entendido la estrecha relación entre los coeficientes de una ecuación algebraica y sus raíces, con el nuevo simbolismo quedó mucho más clara esta simbiosis para todos los matemáticos. Así, en el esquema de Vieta, un analista (algebrista), armado con este simbolismo, podría encontrar resultados para ecuaciones algebraicas generales y luego aplicarlos a casos particulares.

En Inglaterra, por otro lado, las ideas de Vieta tuvieron mucha influencia en dos académicos que, como veremos más adelante, fueron los precursores de una escuela inglesa que favoreció el estilo simbólico y estableció las bases para el desarrollo de una álgebra simbólica en la isla. Ellos fueron Thomas Harriot y William Oughtred, de cuyas contribuciones hablaremos brevemente en esta sección.

Thomas Harriot (1560-1621) fue un matemático de cuya obra matemática se conocía muy poco, pues sólo desde hace unas cuatro décadas los historiadores han mostrado un mayor interés por su legado. El estudio de sus manuscritos, que se calculan entre siete mil y ocho mil páginas, ha revelado a Harriot como un matemático muy competente que también hizo aportaciones importantes a la astronomía y a las ciencias naturales. Desafortunadamente, Harriot nunca publicó sus investigaciones científicas por lo que en su testamento dio instrucciones para que sólo se dispusiera de sus escritos matemáticos y se publicaran, tarea que le fue encomendada a su discípulo y amigo Nathaniel Torporley, quien no completó la compilación de las notas. No fue sino hasta diez años después de la muerte de Harriot que Walter Warner, otro discípulo y amigo, editó parte de los manuscritos algebraicos, los cuales se publicaron en 1631 bajo el título *Artis Analyticae Praxis ad Aequations Algebraicas Resolvendas*[2] en el cual Harriot introduce una notación que va un poco más allá de la propuesta por Vieta.

La *Práctica Analítica* de Harriot es un trabajo sobre teoría de ecuaciones y la solución numérica de ecuaciones polinomiales; en él se introducen algunos símbolos de relación tales como “<” y “>” para las relaciones "menor que" y "mayor que", respectivamente, que no fueron usados originalmente por Harriot, si bien, éste fue el primero en usar símbolos para esas relaciones. El símbolo para la igualdad, parecido al que usamos actualmente, ya tenía tiempo en uso desde que fue introducido por Recorde en 1557 y también se usa en la *Praxis* aunque Harriot usaba uno ligeramente distinto: dos segmentos de recta paralelos ligados por dos perpendiculares que los unían. La multiplicación la denotaba con el símbolo , que también se introduce en su libro. Así, el producto $(a+b)(a+d)$ en nuestra notación moderna aparece en los manuscritos y en la *Praxis* como

$$\begin{array}{r|}a+b\\ a+d\\ \hline\end{array}$$

[2] Práctica del Arte Analítico para la Resolución de Ecuaciones Algebraicas.

Harriot, al igual que Vieta, usaba vocales para denotar la incógnita en una ecuación y consonantes para las constantes; ejemplos típicos que aparecen en sus escritos son los siguientes:

$$aaa - baa - bca + caa - bda + daa + cda = bcd\,,$$
$$aaaa + 28aaa + 183aa = 972\,.$$

En este caso, $aaaa$ denota a^4, aaa denota a^3, etcétera, la cual es una simbología mucho más adecuada que la usada por Vieta, pero no completamente desarrollada aun.

El álgebra que se nos revela a través de la *Praxis* no es, por mucho, comparable al álgebra de los manuscritos inéditos de Harriot. Mientras que en aquélla se presentan muchas repeticiones de ejemplos muy similares en lo que toca al análisis de ecuaciones y además es posible encontrar bastantes errores, atribuibles quizás al editor, en los manuscritos el álgebra que se nos presenta es más sofisticada. Por ejemplo, en la *Praxis*, a excepción de dos casos, sólo se reconocen raíces positivas de ecuaciones aunque sí se manejan ecuaciones con coeficientes negativos. Por otro lado, en los manuscritos se dan ejemplos de ecuaciones de cuarto grado con un análisis muy completo en las que se obtienen todas sus raíces, sean estas positivas, negativas o complejas. A este respecto y para darnos una idea de la maestría de Harriot para resolver ecuaciones, presentamos el siguiente ejemplo tomado de sus manuscritos, el cual no está incluido en la *Praxis*: se trata de resolver la ecuación bicuadrática $a^4 - 6a^2 + 136a = 1155$, misma que Harriot escribía como

$$aaaa - 6aa + 136a = 1155.$$

A partir de la ecuación

$$aaaa - 2aa + 1 = 4aa - 136a + 1156,$$

Harriot procede en los siguientes términos:

$aa - 1 = 2a - 34$	$aa - 1 = 34 - 2a$
$33 = 2a - aa$	$aa + 2a = 35$
$aa - 2a = -33$	$aa + 2a + 1 = 1 + 35$
$aa - 2a + 1 = +1 - 33$	
$a - 1 = \sqrt{-32}$	$a + 1 = \sqrt{36}$
$1 - a = \sqrt{-32}$	$a = \sqrt{36} - 1 = 5$
$a = 1 + \sqrt{-32}$	$-a - 1 = \sqrt{36}$
$a = 1 - \sqrt{-32}$	$a = -\sqrt{36} - 1 = -7$

Creemos que este ejemplo es bastante ilustrativo, muy fácil seguir, y nos permite hacer varias observaciones:

1) Es notable la destreza de Harriot para completar cuadrados.
2) Se nota la simplificación de varios pasos elementales en el proceso de obtener las raíces de una ecuación.
3) Se muestra el conocimiento de que la extracción de una raíz cuadrada nos da dos valores.

4) Harriot maneja todas las raíces por igual, sean estas negativas, positivas, reales o complejas.

Esto nos da una somera idea de la capacidad de Harriot como matemático y de su dominio del simbolismo algebraico. Su influencia se dejó sentir en las dos siguientes generaciones de matemáticos ingleses; incluso Lagrange en el siglo XVIII y Silvester en el siglo XIX se expresan muy bien de algunas partes de su trabajo. Además, el estudio de los manuscritos de Harriot ha revelado una gran cantidad de información y puesto que el único de sus trabajos matemáticos del que se tenía conocimiento era la *Praxis*, su papel en la historia de las matemáticas fue subestimado durante mucho tiempo.

Podemos catalogar la *Praxis* como un trabajo básico que nos ofrece una muy buena introducción a la teoría de ecuaciones, donde las muchas repeticiones de ejemplos similares quizá se deban a motivaciones de tipo pedagógico. En esta obra se destaca el simbolismo empleado por su autor, lo cual lo pone en el camino adecuado para una mayor generalización de los procesos algebraicos. Además, de acuerdo al contenido de la *Praxis* y de sus manuscritos, se pueden hacer varias afirmaciones:

1) El álgebra de Harriot es parte de una profunda transformación que se estaba dando en el álgebra de ese tiempo.
2) El simbolismo de Harriot es novedoso para su tiempo.
3) La generalidad de sus métodos lo encaminan hacia una "nueva álgebra".
4) La solución numérica de ecuaciones por medio de aproximaciones sucesivas que se presenta en la *Praxis*, hace que se consolide el método algorítmico.
5) Fue el primero en dar una solución algebraica simbólica de la ecuación cúbica.
6) Fue el primero en observar que si a, b y c son raíces de una cúbica, entonces la ecuación puede escribirse en la forma equivalente $(x-a)(x-b)(x-c)=0$; aquí hemos usado nuestra notación moderna para expresar la idea de Harriot.

El otro matemático inglés influenciado por las ideas de Vieta fue William Oughtred (1574-1660), de quien podemos decir que se dio a la tarea de difundir las ideas del francés en Inglaterra, subyugado por el simbolismo algebraico de éste y por su *Arte Analítico*. De hecho, Oughtred se impuso la misión de "incitar, asistir y enseñar" a otros en los métodos del arte analítico, por lo que tuvo muchos discípulos, algunos de ellos hicieron contribuciones centrales a la ciencia del siglo XVII. Entre los más famosos podemos mencionar a John Wallis, Chistoper Wren y Richard Delamain.

En el mismo año de publicación de la *Praxis* de Harriot, 1631, también se publicó un trabajo de Oughtred que influyó fuertemente en los matemáticos de su tiempo. Esta obra llevaba por título *Clavis Mathematicae* y ha sido considerada una de las publicaciones matemáticas más influyentes en la historia de las matemáticas en Gran Bretaña; esa influencia se dejó sentir en estudiantes de matemáticas de toda la isla e incluso del continente. Considerado un libro de texto en el cual su " ... *autor no hacía concesiones a estudiantes débiles*" [16, p. 43], la *Clave* cubría algunos tópicos de aritmética, álgebra y un poco de geometría; en él se introducía una gran variedad de símbolos inventados por Oughtred mismo, de los cuales sólo han sobrevivido unos pocos, tales como **::** para proporciones y × para la multiplicación. Con respecto al contenido algebraico de la *Clave*, su autor se centra en el análisis algebraico de ecuaciones cuadráticas y sólo se abordan cuestiones que Oughtred considera adecuadas para estudiantes que inician su entrenamiento en los métodos del análisis tales como la solución general para una ecuación de segundo grado con raíces positivas, reglas para simplificar ecuaciones y ejemplos de aplicación del arte analítico a la geometría.

En cuanto a la escritura de ecuaciones, la *Clave* sigue un estilo parecido al de Vieta y no tan desarrollado como el de Harriot. Por ejemplo, de la terminología *A quadratum, A cubus y A quadrato-quadratum* del latín, Oughtred la adapta por *Aq, Ac y Aqq* para denotar A^2, A^3 y A^4, respectivamente. Además, al igual que Vieta, Oughtred acepta los números negativos como coeficientes de ecuaciones algebraicas pero elude su uso como raíces negativas de ecuaciones y mucho menos acepta raíces complejas. Sin embargo, el mérito de este texto está en que a través de él se difundió ampliamente el estilo simbólico, lo cual propició una aceptación de éste por parte de los matemáticos ingleses.

2. HACIA UNA NUEVA ÁLGEBRA

En la segunda parte de este trabajo mencionamos que la notación algebraica que usamos actualmente se debe, en buena medida a René Descartes (1596-1650), quien la introdujo en *La Géométrie*, uno de los tres apéndices con los cuales ejemplifica su método "*para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias*" que expone en su famoso tratado *Discours de la Méthode*, publicado en 1637.

La Géométrie se divide en tres partes y en ella Descartes presenta lo que hoy conocemos como geometría analítica; además, se formaliza la teoría de ecuaciones y se establecen muchos de los símbolos y de la terminología del álgebra actual. Este trabajo influyó profundamente en el desarrollo del álgebra pues con el método de Descartes las curvas podían ser estudiadas a través de sus ecuaciones y las ecuaciones a través de sus curvas. En palabras del propio Descartes: "*Cualquier problema en geometría puede ser reducido fácilmente a tales términos que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción*" (citado en [16, p. 78]). Al denotar las líneas por medio de símbolos algebraicos y sujetarlas a operaciones geométricas que involucraban construcciones con regla y compás que correspondían a las cinco operaciones aritméticas básicas, i.e. suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, abrió un camino en el cual el álgebra jugaba un papel muy importante y lo llevó a introducir una nueva notación: "*por* a^2 , b^3 *, y expresiones similares, yo ordinariamente hago referencia a simples líneas, a las cuales, sin embargo, llamo cuadrados, cubos, etc., de tal manera que pueda hacer uso de los términos empleados en el álgebra*" (citado en [16, p.79]). Este nuevo simbolismo algebraico de Descartes usa las primeras letras del alfabeto para denotar las cantidades conocidas y las últimas letras se usan para denotar las incógnitas; también se dispone de una notación más compacta: x, x^2, x^3, etcétera, y define los conceptos de ecuación y de raíz (de una ecuación), que fueron aceptados casi de inmediato por los matemáticos de su tiempo.

Para Descartes era claro, y él así lo escribe, que si a es una raíz de una ecuación polinomial, entonces $x - a$ es un factor de la ecuación; también establece la *regla de los signos* por medio de la cual podemos estimar el máximo número de raíces reales de una ecuación de acuerdo con los cambios de signo de los coeficientes de ésta y Descartes ilustra la regla con varios ejemplos. Sin embargo, va mucho más allá al afirmar que "*Toda ecuación puede tener tantas raíces distintas como el número de dimensiones de la incógnita de la ecuación*" (citado en [16, p. 82]), lo que sería para nosotros una primera aproximación al Teorema Fundamental del Álgebra. Para ejemplificar lo anterior, Descartes considera las raíces $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$ y muestra que al multiplicar las ecuaciones $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ y $x - 4 = 0$ se obtiene

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

una ecuación en la que la *dimensión de la incógnita* es 3 y tiene tres raíces.

Si bien Descartes acepta y trabaja con raíces negativas, a las que llama *falsas*, al parecer se siente más cómodo usando sólo raíces positivas; con respecto a las raíces complejas, éstas también son aceptadas por él pues en el libro III de *La Géométrie* hace una afirmación más fuerte que la citada anteriormente, la cual lo acerca más al Teorema Fundamental del Álgebra: Un polinomio de grado n tiene n raíces, sean estas positivas, falsas reales o complejas. En palabras del propio Descartes: "*Ni las verdaderas raíces ni las falsas son siempre reales; algunas veces son solamente imaginarias; esto es, mientras que siempre podemos concebir tantas raíces para cada ecuación de la forma como ya las he asignado, no siempre existe una cantidad definida que corresponda a cada raíz así concebida. De esta manera, si bien podemos concebir que la ecuación* $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ *tiene tres raíces, solamente existe una raíz real, 2, mientras que las otras dos, de cualquier manera que las incrementemos, disminuyamos, o las multipliquemos de acuerdo con las reglas ya expresadas, permanecen imaginarias*" (ver [16, p.83]). Así, esas raíces que no corresponden a cantidades son sólo producto de la imaginación y Descartes las llama *imaginarias*; su reconocimiento de éstas va más allá de lo aceptado por sus colegas matemáticos y, de cierta manera, legitima su uso.

Otro matemático francés a quien también se le atribuye la invención de la geometría analítica casi simultáneamente que Descartes, aunque de manera independiente, fue Pierre Fermat (1601-1665). Sus muchas contribuciones las podemos situar en varias ramas de las matemáticas tales como la teoría de números, el análisis diofantino, la probabilidad y el cálculo, entre las más significativas. De hecho, en varias de estos campos fue pionero y dejó una huella perdurable hasta nuestros días.

A Fermat le debemos el uso de las llamadas coordenadas cartesianas pues fue quien las introdujo en su exposición del método de la geometría analítica, mismo que desarrolló en su escrito *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*[3], el cual data de 1643 pues en ese año Fermat se lo envió a Pierre de Carcavi con quien mantenía correspondencia. Sabemos por varias fuentes que mucho del material expuesto en esta obra es bastante familiar para Fermat desde al menos 1629, y para 1636 ya había descubierto el principio fundamental de la geometría analítica pues, en sus propias palabras: "*Siempre que en una ecuación final estén presentes dos cantidades desconocidas, tenemos un lugar geométrico, uno de cuyos*

[3] Introducción a los lugares [geométricos] planos y sólidos.

extremos describe una línea, recta o curva" ([2], p. 346). Sin embargo, es hasta después de su muerte que por primera vez se publican muchas de sus investigaciones en su "*Varia Opera*", la cual salió a la luz en 1679.

En su *Introducción* Fermat sigue la notación de Vieta y, por ejemplo, la ecuación de un círculo la escribe como *Bq. + Aq. = Eq.* (*A* y *B* son incógnitas, *E* es una constante y *q* es por quadratum). Además, clasifica las secciones cónicas de acuerdo a su ecuación y muestra que toda ecuación cuadrática en dos incógnitas representa una línea recta o una cónica.

Por otra parte, podemos decir que Fermat es el fundador de la teoría moderna de los números y obtuvo una gran cantidad de resultados en este campo. No dio demostración alguna de muchos de sus "teoremas", la mayoría de los cuales han probado ser correctos pues varios matemáticos de las generaciones posteriores a la suya se encargaron de establecer las demostraciones. La más famosa de esas afirmaciones es sin duda el llamado *Último Teorema de Fermat* que establece que no existen números enteros *x*, *y*, *z* que satisfagan la ecuación $x^n + y^n = z^n$ para $n \geq 3$, de la cual Fermat afirmaba tener una demostración "verdaderamente bella". Este teorema sólo se pudo probar hasta hace poco tiempo, en la última década del siglo XX por Andrew Wiles, del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Las matemáticas desarrolladas para lograr esta proeza han dejado una profunda huella en el álgebra contemporánea, en la teoría algebraica de números y en la geometría algebraica. A propósito, se le llama "último teorema" no porque haya sido el último enunciado por Fermat sino porque fue el último en ser demostrado.

Mientras en la Europa continental tenían lugar todas esas novedosas ideas, en Inglaterra, un discípulo de Oughtred, John Wallis (1616-1703), llegaría a ser reconocido como uno de los mejores matemáticos del continente. En 1648 estudió a Descartes y se replanteó el trabajo de éste con respecto a la ecuación bicuadrática; Wallis le dio un nuevo enfoque al factorizarla por medio de dos ecuaciones cuadráticas. Para el año de 1656 se publica su libro *Operum Mathematicorum Pars Altera*[4] el cual consta de dos partes siendo una de ellas el *Tractatus de Sectionibus Conicis*[5]. Este tratado es el primer texto sobre las cónicas desde un punto de vista Cartesiano y aparte de éstas, se estudian curvas planas tales como la parábola cúbica $a^2y = x^3$ y la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$, la cual jugó un importante papel en el desarrollo posterior del cálculo infinitesimal.

Pero el trabajo que más fama le trajo a Wallis fue su *Aritmética Infinitorum*[6], que se publicó en 1655; esta obra ejercería una influencia decisiva en el trabajo de Newton sobre el cálculo infinitesimal. En particular, es en este tratado donde aparece la famosa fórmula:

$$\frac{4}{\pi} = 1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times \cdots$$

En 1659 Wallis publica *Tractatus Duo* en el cual se presentaban sus investigaciones sobre algunas curvas tales como la cicloide, la cisoide y también sobre otras figuras geométricas.

[4] Obra Matemática Selecta.
[5] Tratado de Secciones Cónicas.
[6] Aritmética del Infinito.

Otro texto de Wallis de título *Treatise of Algebra, Both Historical and Practical* se publicó en 1685 y su autor adopta una posición un tanto chauvinista pues acusa injustamente a Descartes de que gran parte de su trabajo lo tomó de la *Praxis* de Harriot y trata de hacer ver que el álgebra simbólica de Vieta ya estaba presente en la matemática griega.

Mención especial debemos hacer de Isaac Newton (1642-1727) de quien se dice ha sido uno de los más grandes científicos de la historia de la humanidad. Su trabajo más conocido y admirado es *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*[7] (1687) en el que establece las leyes del movimiento de los cuerpos y las leyes de la gravitación universal sobre bases geométricas; también hizo contribuciones fundamentales en óptica y por eso la idea que se tiene de él es la de un físico-matemático. Sin embargo, su contribución a las "matemáticas puras" y en particular al desarrollo del álgebra, son suficientes para asegurarle un lugar junto a los más grandes matemáticos de todos los tiempos [6, p. 6].

Se sabe con certeza que el período de 1664 a 1667 fue determinante en la vida de Newton pues muchas de sus más revolucionarias ideas las desarrolló en esa época. Antes de esos años sus lecturas habían sido mayormente sobre filosofía aristotélica, lo común en las universidades europeas de ese tiempo; sin embargo, aprendió muy bien el estilo de razonamiento lógico usado por Aristóteles en su complicado sistema filosófico. En 1664 sus lecturas fueron más allá de las que ofrecía el currículum tradicional y se abrió a las ideas cartesianas.

Si bien Newton ya había leído a Euclides cuando estudiante, sus conocimientos de geometría no eran particularmente profundos y, aunque parezca contradictorio, su interés por la astrología lo llevó a estudiar trigonometría en 1663. Al no entender varias demostraciones de su texto de trigonometría por falta de bases geométricas firmes, vuelve de nuevo al estudio de la geometría euclidiana aunque sus lecturas fueron bastante superficiales ya que sólo leía los enunciados de los teoremas pues las demostraciones le parecían muy sencillas, opinión que cambió al llegar al llamado Teorema de Pitágoras. Esto hizo que releyera a Euclides con mayor atención de principio a fin. Después leyó la *Clave* de Oughtred y tuvo algunas dificultades para entenderlo por completo. Cambió entonces su lectura a la *Geometría* de Descartes en la edición latina que de esta obra había realizado Frans van Schooten la cual se publicó en 1649; uno de los grandes méritos del trabajo de Schooten fue que esta edición estaba ampliamente comentada y presentaba explicaciones muy valiosas del trabajo de Descartes. Después de varias relecturas entendió a Descartes mejor que a Euclides por lo que leyó de nuevo a éste último y, por segunda vez, a Descartes. Luego vinieron las lecturas de *Arithmetica Infinitorum* de Wallis; *Euclides Elementorum* de Isaac Barrow, quien también fue su maestro; la *Opera Mathematica* de Vieta; también es muy posible que haya leído el *Tractatus Duo* de Wallis.

Fue en la lectura de la *Arithmetica* de Wallis que Newton vino a descubrir su famoso Teorema del Binomio el cual ya se conocía desde mucho antes para exponentes enteros no negativos. En nuestra notación moderna este teorema lo expresamos como:

[7] Principios Matemáticos de la Filosofía Natural.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k ,$$

donde n es un entero no negativo, a, b números reales y $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Newton lo generalizó para exponentes fraccionarios y negativos, y apareció publicado por primera vez en el *Tratado de Álgebra* de Wallis, con el debido crédito a su descubridor. Debemos decir que Newton no dio una demostración rigurosa del teorema sino que llegó a su formulación después de sus investigaciones sobre el cálculo de áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^n$. De hecho, en la *Arihtmetica* ya había estudiado cómo calcular áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$, donde n es un entero positivo par.

Newton estaba sumamente complacido por este resultado, el cual fue muy importante en sus posteriores investigaciones que lo llevaron a la formulación del cálculo diferencial e integral. Las demostraciones rigurosas del mismo vinieron después con McLaurin (para valores racionales de n); Giovanni Francesco Salvemini y A. G. Kästner (para valores enteros de n); Euler (para valores fraccionarios de n), y Abel (para n complejo).

Otro resultado muy importante de Newton tiene que ver con polinomios simétricos, que ahora trataremos de explicar. Si se tiene la expresión polinomial

$$p(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2$$

y hacemos intercambios de las variables u, v o w, entonces el polinomio p queda invariante, es decir, no cambia. Por ejemplo, si *permutamos u por w* se tendría

$$p(w,v,u) = w^2 + v^2 + u^2 = u^2 + v^2 + w^2 = p(u,v,w),$$

de donde se observa que el polinomio p no cambió al realizar la permutación anterior. Decimos entonces que p es un **polinomio simétrico**. En este caso se tienen tres variables pero nuestros polinomios pueden ser de cualquier número de variables.

De particular importancia son los **polinomios simétricos elementales** que en el caso de dos variables son

$$\sigma_1(u,v) = u + v$$
$$\sigma_2(u,v) = uv;$$

estos polinomios están ligados a una ecuación de segundo grado de la siguiente manera: Supongamos que u y v son las raíces de la ecuación

$$x^2 + ax + b = 0,$$

donde a y b son números complejos; de aquí se sigue que

$$x^2 + ax + b = (x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv = 0,$$

y por lo tanto, se tiene una relación entre los coeficientes de la ecuación y los polinomios simétricos elementales en sus raíces:

$$-a = u + v = \sigma_1$$
$$b = uv = \sigma_2.$$

Similarmente, para una cúbica de la forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{2.1}$$

donde los coeficientes *a*, *b* y *c* son complejos y si suponemos que sus raíces son *u*, *v* y *w*, entonces

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x-u)(x-v)(x-w) \\ &= x^3 - (u+v+c)x^2 + (uv+uw+vw)x - uvw \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} -a &= u+v+w = \tau_1(u,v,w) \\ b &= uv+uw+vw = \tau_2(u,v,w) \\ -c &= uvw = \tau_3(u,v,w)\,, \end{aligned}$$

son las relaciones de los coeficientes de la cúbica con los polinomios simétricos elementales τ_1, τ_2 y τ_3 en las raíces *u*, *v* y *w*. Notemos que no es necesario conocer las raíces sino que basta con suponer su existencia. Es claro que lo anterior se puede generalizar para una ecuación de grado *n* y se tendrá una relación entre los coeficientes de la ecuación y los *n* polinomios simétricos elementales de sus raíces.

Como se mencionó en la segunda parte, Cardano ya había entendido, al menos para la cúbica, esta relación entre coeficientes y raíces. En el nuevo esquema de Vieta, estas relaciones fueron más evidentes y él mismo fue el primero en observar que ésta era una regla que se cumplía siempre para las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual al quinto.

En 1707 se publica el libro *Arithmetica Universalis* de Newton, cuando éste ya gozaba de fama mundial y había cesado en gran parte su actividad científica. Se sabe que los resultados que aparecen en este texto habían sido descubiertos mucho tiempo atrás por su autor y sólo vieron la luz hasta ese año. Entre esos resultados, Newton enuncia un teorema sobre las sumas de potencias de las raíces de una ecuación polinomial de la forma

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0\,, \tag{2.2}$$

el cual vendría a ser muy importante en los desarrollos posteriores del álgebra. Por ejemplo, para el caso de la cúbica (2.1), Newton deduce, entre otras relaciones, que

$$\begin{aligned} u+v+w &= -a\,, \\ u^2+v^2+w^2 &= a^2-2b\,, \\ u^3+v^3+w^3 &= -a^3+3ab-3c\,, \end{aligned}$$

y da muchas otras fórmulas para diferentes combinaciones de potencias de las raíces para la cúbica y para ecuaciones de grado 8, aunque es claro que estaba consciente de que hay fórmulas análogas para ecuaciones de cualquier grado, como en (2.2), es decir, que *cualquier polinomio simétrico en las raíces de una ecuación se puede expresar en términos de los coeficientes de la ecuación* [6, p. 8]. Este resultado es la piedra angular en el que se basaron los trabajos posteriores sobre la teoría de ecuaciones, los cuales vieron su culminación en una bella teoría de la cual nos ocuparemos más adelante, a saber, la Teoría de Galois.

Otro personaje muy importante en la historia del desarrollo del álgebra es Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Coinventor del cálculo diferencial e integral de manera independiente de Newton, estos dos personajes se enfrascaron en una amarga disputa por los derechos de autoría del cálculo la cual era atizada por el gran genio inglés de manera indirecta a través de sus incondicionales de la Real Sociedad de Londres. Hoy sabemos que las acusaciones de plagio en contra de Leibniz eran infundadas y podemos darnos una idea clara de lo que cada quien aportó a esta rama fundamental de las matemáticas. Sin embargo, las contribuciones de Leibniz al álgebra son también importantes aunque poco conocidas.

Una de estas contribuciones tiene que ver con la generalización del teorema del binomio a expresiones multinomiales tales como $(a+b+c)^n$, $(a+b+c+d)^n$, etc. También se le atribuye el haber sido el primero en introducir la noción de **determinante** al trabajar con sistemas de ecuaciones. Otra de sus aportaciones tiene que ver con los números complejos, cuyo estudio había sido relegado en ese tiempo. Leibniz prueba en 1676 que

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6},$$

y algunos años más tarde, en 1702, que

$$x^4+a^4=(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{\sqrt{-1}});$$

esto hizo que Leibniz se sintiera bastante impresionado por todo el potencial que ofrecían los números complejos aunque al parecer nunca exploró la posibilidad de darles una representación geométrica y el estatus que les dio estaba a medio camino entre la existencia y la no existencia.

Su otra gran contribución a las matemáticas tiene que ver con lo que podríamos llamar el álgebra de la lógica. En efecto, se puede considerar a Leibniz como el precursor de la lógica simbólica pues sus contribuciones al área fueron importantes y se dice que con él, la lógica aristotélica adquirió nueva vida, después de haber estado casi en el olvido. Sus investigaciones en lógica lo llevaron a plantearse la búsqueda de una *characterística universalis* pues creía firmemente que combinando la lógica y las matemáticas se podría crear un lenguaje simbólico general en el cual todos los problemas científicos serían resueltos con un mínimo de esfuerzo. En este lenguaje universal, las proposiciones y las relaciones lógicas entre ellas serían representadas por letras y símbolos, de tal manera que "*… todas las verdades de razón se reducirían a una especie de cálculo, y los errores sólo serían errores de computación*" (citado en [11, p. 15]. Esta especie de cálculo que se imaginó Leibniz, y que él llamaría *calculus ratiocinator* (es decir, cálculo lógico), "... *no es otra cosa, de hecho, que una operación mediante símbolos, que tiene lugar no sólo en el caso de las cantidades, sino también en cualquier otro razonamiento*.

En estas ideas de Leibniz se puede encontrar el germen de la lógica simbólica o matemática, aunque es preciso señalar que dichas ideas no fueron formalizadas por él y habría que esperar casi dos siglos más para que se concretaran en la gran obra de George Boole (1815 – 1864) quien establece las bases algebraicas de la lógica.

En resumen, es un hecho incuestionable que durante los siglos XVI y XVII surge una *nueva álgebra*, que no solamente contribuyó en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, sino que sus métodos, su simbolismo y su relación con la geometría serían parte fundamental de los grandes progresos matemáticos que se dieron en los siglos XVIII y

XIX. Con la expresión "nueva álgebra" no nos estamos refiriendo al álgebra abstracta sino que nuestra intención es, por un lado, hacer hincapié en los nuevos desarrollos algebraicos que se dieron en ese período los cuales fueron de índole muy distinta al álgebra que les precedió, y, por otro, subrayar el hecho de que este nuevo simbolismo preparaba el camino hacia la abstracción y la generalización. Sin embargo, no debemos olvidar que esta nueva álgebra tiene sus fuentes en el *Ars Magna* de Cardano y en el *Artem Analyticem* de Vieta, textos de los cuales ya hemos hablado; asimismo, se caracteriza por nuevos resultados, los objetos con los que se trabaja, su justificación metodológica y una relación muy diferente con la geometría pues ya no dependerá más de ésta última para la confirmación de sus resultados.

3. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Una manera de enunciar el Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) es como sigue:

Toda ecuación polinomial de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas.

Con esto queremos decir lo siguiente: Si consideramos el polinomio de grado *n*, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_i \in \mathbf{C}$ para *i* = 0, ..., *n*, entonces existen *n* números complejos $z_1, \ldots, z_n$ que satisfacen la **ecuación polinomial** $p(x) = 0$, esto es $p(z_k) = 0$ para *k* = 1, ..., *n*.

Algunas formas equivalentes de enunciar el teorema son:

- El polinomio *p* se *factoriza* en un producto de factores lineales como
$$p(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) .$$
- El *campo* de los números complejos es *algebraicamente cerrado*.

Otra versión menos general que la anterior, pero también bastante conocida es la siguiente: "Todo polinomio en una variable con coeficientes reales se puede factorizar como un producto de factores reales de primero o segundo grado", donde por "factores reales" entendemos polinomios con coeficientes reales. Damos un ejemplo para ilustrar esto: el polinomio $p(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6$ se factoriza como $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x^2+1)$, siendo sus cinco raíces 1, 2, 3, *i*, –*i*. En adelante a un polinomio con coeficientes reales lo llamaremos un **polinomio real**.

Podemos decir que los algebristas italianos del siglo XVI asumían que dada una ecuación de grado menor al quinto, con coeficientes enteros, siempre se podían encontrar sus raíces. Además, se tienen muchos ejemplos por parte de ellos en los que se dan soluciones particulares para ecuaciones muy específicas de grado mayor al cuarto. Esto nos indica que había cierta conciencia de que una ecuación cuadrática tiene dos raíces, una cúbica, tres, y una bicuadrática, cuatro. Sin embargo, el primero en establecer de forma explícita que una ecuación polinomial de grado *n* deberá tener *n* raíces es Albert Girard (1595-1632), quien en 1629 publica un pequeño tratado de álgebra, *Invention Nouvelle en l'Algebra*, en el cual se trata ampliamente el tema de la relación entre los coeficientes de una ecuación con las funciones simétricas de sus raíces y también se presentan algunos ejemplos de ecuaciones de cuarto grado para las cuales establece que hay cuatro soluciones, no más, no menos.

Descartes, como ya hemos dicho, presentó una versión de este teorema en *la Géométrie* y da algunos ejemplos para ilustrarlo. También deja en claro el hecho de que si t es una raíz de una ecuación polinomial, entonces $x - t$ es un factor de la misma. Algunos otros matemáticos como Newton y Colin Maclaurin (1698-1746) también darían versiones parecidas pero sin presentar demostración alguna.

En 1746, Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) hace el primer intento serio por demostrar el TFA; su prueba no es del todo correcta pues usa el hecho de que una función continua en un conjunto compacto toma un valor mínimo, lo cual se probaría hasta mucho tiempo después; sin embargo, sus ideas probaron ser de utilidad algunos años más tarde. Más o menos por esas fechas, Leonhard Euler (1707-1783) pudo probar que todo polinomio real de grado n, con $n \leq 6$, tiene exactamente n raíces complejas y además era claro para él que si un polinomio real tenía una raíz compleja de la forma $a + b\sqrt{-1}$, entonces su **conjugada** $a - b\sqrt{-1}$ también era raíz de ese polinomio. En 1749 intentó el caso general, a saber, que todo polinomio real de grado n, para n arbitrario, tiene exactamente n raíces complejas. Su prueba es incompleta y Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), en una memoria presentada a la academia de Berlín en 1772, trata de completar la prueba de Euler, aunque su razonamiento no es muy preciso pues Lagrange, al igual que Euler y muchos matemáticos de la época, operaban libremente con las raíces de las ecuaciones como si fueran números ordinarios sin tomar en cuenta que esas raíces podían ser números complejos.

Es a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a quien le corresponde el mérito de haber sido el primero en dar una prueba convincente, aunque no completamente rigurosa, del TFA en su tesis doctoral titulada "*Nueva Demostración del Teorema de que Toda Función Algebraica en una Variable puede ser Factorizada en Factores Reales de Primero o Segundo Grado*", en el año 1799. En este trabajo se hace una crítica de los intentos anteriores de D'Alembert, Euler y Lagrange, y se aborda el teorema desde una perspectiva diferente pues Gauss no calcula las raíces de un polinomio real sino que demuestra la existencia de éstas por medio de un método muy original, que presentamos aquí de manera muy sintetizada. Si el polinomio real $P(z)$ tiene una raíz compleja de la forma $a + bi$, entonces $P(a + bi) = 0$ y, además, esta función algebraica es posible representarla como $P(x + yi)=u(x,y) + iv(x,y)$. La gran originalidad de Gauss fue hacer corresponder cada raíz compleja $a + bi$ de P con un punto (a,b) del plano cartesiano. De esta manera, el punto (a,b) debe ser una intersección de las curvas $u = 0$ y $v = 0$ por lo que es necesario probar que estas dos curvas se cortan. Gauss utiliza un argumento cualitativo para esta prueba y su razonamiento se basa en las gráficas de las curvas por lo que no es completamente riguroso. Sin embargo, su argumento es convincente y prueba así que un polinomio real de grado n se factoriza como producto de factores lineales de primero y segundo grado.

En 1814, Jean Robert Argand (1768-1822) presenta una prueba sencilla del TFA basado en las ideas de D'Alembert y en 1816 Gauss ofrece otra prueba del teorema la cual se basa en las ideas de Euler; su demostración es completa y correcta. En ese mismo año, Gauss presenta una tercera prueba del teorema y, en este caso, sus argumentos son de naturaleza geométrica, como en su primera demostración.

En 1849, Gauss prueba el TFA en su forma general, a saber, que un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas, lo que en términos modernos equivale a decir que el campo de los números complejos es algebraicamente cerrado.

4. LA ECUACIÓN GENERAL DE GRADO *n*

Una etapa de fundamental importancia en la historia del álgebra podemos situarla hacia la segunda mitad del siglo XVIII y está conectada con la teoría de ecuaciones algebraicas. Uno de los problemas centrales en este tiempo era el de encontrar las soluciones de la ecuación general de grado n

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{4.1}$$

por medio de radicales, esto es, a través de hacer operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces) con los coeficientes de la ecuación.

Los métodos para resolver ecuaciones cúbicas y bicuadráticas de los algebristas italianos del siglo XVI fueron generalizados por varios matemáticos en los siglos posteriores; entre ellos podemos mencionar a Vieta, Descartes, Euler y Bézout. Debido al éxito que éstos lograron con el análisis algebraico de la ecuación (4.1) para los casos $n = 3$ y $n = 4$, muchos de los grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII trataron con ahínco de encontrar un método para resolver por radicales la ecuación general de quinto grado; algunos de ellos fueron Newton, Leibniz, Tschirnhausen. D'Alembert y Euler. Se tenía la idea de que dicho método debía existir y, en todo caso, si no se había encontrado era debido a que no se era lo suficientemente ingenioso y hábil. Así, el problema de la *cúbico-cuadrática* resultó ser bastante elusivo y no hubo avances significativos sino hasta 1770 con los trabajos de Vandermonde y Lagrange, los cuales comentaremos brevemente a continuación.

En 1770, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) presentó a la Academia de Ciencias de París un trabajo titulado *Mémoire sur la Résolution des Equations* en el cual enunciaba que toda ecuación de la forma

$$x^p - 1 = 0\,, \tag{4.2}$$

donde p es un número primo, es soluble por radicales. Notemos que basta probar el resultado para los exponentes primos pues si $x^m - 1 = 0$, donde $m = np$ con p primo, entonces se tiene que $x^m - 1 = (x^n)^p - 1 = 0$ y haciendo $y = x^n$ se obtiene una ecuación de la forma (4.2) para la incógnita y, la cual se podría resolver por radicales en caso de que la afirmación de Vandermonde fuera correcta. Sin embargo, Vandermonde prueba el resultado sólo para $p \leq 11$, lo cual no nos permite resolver el caso general.

Por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación

$$z^n - 1 = 0 \tag{4.3}$$

tiene n soluciones complejas y a éstas se les llama las **raíces *n*-ésimas de la unidad**. Decimos que una raíz α de (4.3) es una **raíz *n*-ésima primitiva de la unidad** si $\alpha^n = 1$, α ≠ 1 y $\alpha^j \neq 1$ para $1 \leq j < n$.

Las raíces de la ecuación (4.3) son números complejos que están en el círculo unitario $|z| = 1$ y dividen a éste en n arcos de igual longitud. Si unimos las raíces consecutivas por medio de segmentos de recta, lo que obtenemos es un polígono regular de n lados inscrito en el círculo. Por tal motivo, a la ecuación (4.2) se le llama la **ecuación ciclotómica** ya que sus raíces dividen (*tomos*) al círculo (*ciclo*) en partes iguales.

Además, si u es cualquier número (real o complejo), entonces podemos obtener sus raíces n-ésimas, pues basta resolver la ecuación $z^n = u$. Si una de las raíces de esta ecuación es u_0, entonces las otras $n-1$ son $\alpha u_0, \alpha^2 u_0, \ldots, \alpha^{n-1} u_0$, donde α es una raíz n-ésima primitiva de la unidad. En base a esto, Vandermonde razona que si x, y, z denotan las raíces (desconocidas a priori) de la ecuación cúbica general $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, entonces podemos expresarlas en la forma

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}[(x+y+z) + (x+\alpha y+\alpha^2 z) + (x+\alpha^2 y+\alpha z)] \\ &= \tfrac{1}{3}[(x+y+z) + \sqrt[3]{(x+\alpha y+\alpha^2 z)^3} + \sqrt[3]{(x+\alpha^2 y+\alpha z)^3}\,], \qquad (4.4) \end{aligned}$$

donde α es una raíz cúbica primitiva de 1; expresiones similares se tienen para y y z.

Notemos que por lo dicho anteriormente sobre los polinomios simétricos en las raíces de una ecuación polinomial, se tiene que $x + y + z = a$, es una cantidad conocida. Además, si queremos obtener la raíz x, es necesario conocer las cantidades bajo los símbolos radicales en la ecuación (4.4). Pero Vandermonde advierte que si

$$u = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^3$$

y

$$v = (x + \alpha^2 y + \alpha z)^3,$$

entonces $u+v$ y uv son polinomios simétricos en x, y, z, y por lo tanto, son conocidos ya que cualquier polinomio simétrico en las raíces se puede expresar en base a los polinomios simétricos elementales y éstos a su vez están estrechamente ligadas a los coeficientes de la cúbica, lo cual ya se mencionó en la sección 2, y era un hecho ampliamente conocido desde los tiempos de Newton.

Una vez conocidas las cantidades $u+v$ y uv, es posible obtener los valores de u y v, con lo cual queda determinada la raíz x en (4.4). En realidad, usando este procedimiento se obtienen nueve soluciones para x por lo que es necesario probar todas éstas en la cúbica para encontrar la solución verdadera. Procedimientos análogos para y y para z nos dan las tres raíces de la cúbica, probando así que es posible resolverla por radicales.

Vandermonde da también un método similar para encontrar las raíces de la bicuadrática e incluso analiza algunos casos de ecuaciones particulares de grado superior. Lamentablemente, su trabajo fue publicado hasta 1774 y sus razonamientos serían eclipsados por el gran tratado de Lagrange sobre la teoría de ecuaciones.

En 1771 se publica la memoria de Lagrange, *Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations*, por la Academia Prusiana de Ciencias. Este es un tratado de considerable extensión[8] en el cual se analizan, desde diferentes puntos de vista, varios de los métodos conocidos en ese tiempo para resolver por radicales las ecuaciones algebraicas de tercero y cuarto grado; con base en este análisis, Lagrange presenta un método que resume los anteriores y logra encontrar la característica subyacente en cada uno de los otros métodos: el hecho de que funcionen se debe a que es posible reducir cualquier cúbica o bicuadrática a una ecuación auxiliar cuyo grado es menor, en uno, que el de las ecuaciones originales; éstas, por lo tanto, admiten una solución por medio de radicales.

Para ilustrar el método de Lagrange, supongamos que *x*, *y*, *z* son las raíces de la cúbica general, las cuales no conocemos a priori. Consideremos ahora la cantidad *t* dada por

$$t = x + \alpha y + \alpha^2 z, \tag{4.4}$$

donde α es una raíz cúbica primitiva de la unidad. (Las tres raíces cúbicas de la unidad son 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.) Si permutamos las raíces en (4.4), entonces obtenemos seis valores posibles para *t* pues el total de permutaciones de tres objetos es 3! = 6. Sean t_1, t_2, ..., t_6 los distintos valores que se obtienen de (4.4) al permutar las raíces de la cúbica. Estos seis valores satisfacen la ecuación

$$f(x) = (x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)(x-t_4)(x-t_5)(x-t_6) = 0 \tag{4.5}$$

y es posible notar que los coeficientes de esta ecuación son polinomios simétricos en las t_i; por la manera en que se definieron los t_i, también son simétricos en *x*, *y*, *z*; luego, los podemos conocer en términos de los coeficientes de la cúbica que pretendemos resolver. La ecuación (4.5) es la ecuación auxiliar de la que hablamos arriba y hoy es llamada la **resolvente de Lagrange** para el caso de la cúbica.

Notemos que (4.5) es una ecuación de sexto grado, considerablemente mayor que el de la cúbica que queremos resolver por radicales. Sin embargo, en este caso las cantidades t_i satisfacen las relaciones $t_2 = \alpha t_1$, $t_3 = \alpha^2 t_1$, $t_5 = \alpha t_4$ y $t_6 = \alpha^2 t_4$. Esto se cumple para cierto orden de las permutaciones de las raíces en (4.4); si se permutan las raíces en otro orden, obtendremos relaciones similares a las anteriores. De esta manera, (4.5) es una ecuación cuadrática en x^3 pues

$$f(x) = (x^3 - t_1{}^3)(x^3 - t_4{}^3) = (x^3)^2 - (t_1{}^3 + t_4{}^3)x^3 + t_1{}^3 t_4{}^3.$$

Si hacemos $u = t_1{}^3$ y $v = t_4{}^3$, entonces los coeficientes de esta ecuación son precisamente *u* + *v* y *uv*, los cuales es posible expresarlos en términos de los coeficientes de la cúbica original y se obtiene a través de ellos la solución como lo comentamos arriba. De esta manera, es posible obtener los seis valores para *t*; por consiguiente, las soluciones de la cúbica están dadas por

$$x = \tfrac{1}{3}[(x+y+z) + t_1 + t_4],$$
$$y = \tfrac{1}{3}[(x+y+z) + \alpha^2 t_1 + \alpha t_4],$$
$$z = \tfrac{1}{3}[(x+y+z) + \alpha t_1 + \alpha^2 t_4],$$

[8] En [14] ocupan 116 páginas.

por lo que sólo necesitamos identificar bien a t_1 y t_4 de entre las seis posibles soluciones de la ecuación resolvente (4.5). Recuérdese que la expresión $x + y + z$ es un polinomio simétrico elemental de estas tres raíces y, por lo tanto, conocemos su valor pues es el coeficiente del término cuadrático en la cúbica (2.1). En este caso, Lagrange va más allá y nos da una manera explícita para calcular esos valores.

En el caso de la ecuación general de cuarto grado

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

si proponemos x, y, z, w como sus raíces, entonces al definir la cantidad t como $t = x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 w$, donde α es una raíz cuarta primitiva de la unidad, la resolvente es una ecuación de grado 4! = 24, las posibles permutaciones de estas cuatro raíces. Sin embargo, en este caso se simplifica mucho el procedimiento pues las raíces cuartas de la unidad son $1, i, -1, -i$, y tanto Vandermonde como Lagrange usaron este hecho para obtener las raíces de la bicuadrática; en este proceso es necesario resolver una cúbica como ecuación auxiliar. De hecho, este último probó que las veinticuatro permutaciones de las raíces sólo producen seis valores distintos para t, los cuales son

$$\pm(x - y + z - w),$$
$$\pm(x + y - z - w),$$
$$\pm(x - y - z + w),$$

y cada uno de ellos ocurre cuatro veces. Si los denotamos por $\pm t_1$, $\pm t_2$, $\pm t_3$, respectivamente, entonces la ecuación resolvente es

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-t_1)^4(x+t_1)^4(x-t_2)^4(x+t_2)^4(x-t_3)^4(x+t_3)^4 \\ &= g(x)^4 = 0, \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = (x^2 - t_1^2)(x^2 - t_2^2)(x^2 - t_3^2),$$

es un polinomio cúbico en x^2; además t_1^2, t_2^2 y t_3^2 son las raíces de una ecuación cúbica conocida pues los coeficientes de *g(x)* son simétricos en t_1^2, t_2^2 y t_3^2; luego, también son simétricos en *x*, *y*, *z*, *w*. Dado que podemos resolver dicha cúbica, es posible encontrar los valores para t_1^2, t_2^2 y t_3^2 y por consiguiente, los de $\pm t_1$, $\pm t_2$, $\pm t_3$, ya que sólo basta extraer raíces cuadradas. De esta manera, las soluciones de la bicuadrática vienen dadas por

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}[(x+y+z+w) + t_1 + t_2 + t_3] \\ y &= \tfrac{1}{4}[(x+y+z+w) - t_1 + t_2 - t_3] \\ z &= \tfrac{1}{4}[(x+y+z+w) + t_1 - t_2 - t_3] \\ w &= \tfrac{1}{4}[(x+y+z+w) - t_1 - t_2 + t_3]. \end{aligned}$$

Es necesario observar que sólo se necesitan escoger los signos adecuados a t_1, t_2 y t_3, lo cual, en el peor de los casos lo hacemos por ensayo y error. También es necesario señalar que $x + y + z + w$ es un polinomio simétrico elemental de estas raíces y es, por lo tanto, igual al coeficiente del término cúbico en la ecuación bicuadrática original.

Lagrange aplicó el mismo método a la ecuación general de quinto grado. Al considerar

$$t = x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 w + \alpha^4 v,$$

donde suponemos a priori que *x*, *y*, *z*, *w*, *v* son las cinco raíces de la ecuación original y α es una raíz quinta primitiva de la unidad, Lagrange observó que las posibles permutaciones de estas raíces nos dan 5! = 120 valores para *t* por lo que la ecuación resolvente *f*(*x*) = 0 es de grado 120. Sin embargo, Lagrange pudo probar que ésta se puede reducir a un polinomio de grado 24 en x^5 pero no pudo obtener nada concluyente. Además, los "trucos" que se podían realizar en los casos anteriores no se pueden aplicar aquí pues todas las raíces quintas de la unidad son primitivas, excepción de la trivial $\alpha = 1$; así, no es posible hacer las reducciones de la resolvente como en el caso de la cúbica y la bicuadrática.

En palabras del propio Lagrange: "*El problema de resolver [por radicales] las ecuaciones cuyo grado es mayor que el cuarto es uno de esos problemas que no han sido resueltos, si bien nada prueba la imposibilidad de resolverlos*" [14, p.305]. Sin embargo, unas páginas más adelante Lagrange expresa sus dudas en cuanto a poder encontrar un método por ese camino: "*De nuestro razonamiento vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado pudieran dar una completa solución a las ecuaciones de quinto grado*" [14, p. 307]. Estas palabras son muy significativas pues es la primera vez en que se expresan dudas sobre la posibilidad de resolver por radicales las ecuaciones polinomiales de grado superior al cuarto.

En el caso de la ecuación general de grado *n*, Lagrange considera funciones racionales de las raíces y los coeficientes de ésta lo que le lleva a probar algunos resultados importantes. En efecto, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces de (4.1), vistas como variables indeterminadas; dos funciones racionales $g(x_1, \ldots, x_n)$ y $h(x_1, \ldots, x_n)$ se dicen ser *similares* (Lagrange usa el término *semblables*) si todas las permutaciones de las raíces que dejan invariante a g también dejan invariante a *h*, y recíprocamente. De esta manera, Lagrange prueba que "*Si todas las permutaciones que dejan invariante a g también dejan invariante a h, entonces es posible expresar h como una función racional de g y de los coeficientes de la ecuación dada*" (citado en [22, p. 81]. Además, si $t_1, t_2, \ldots, t_k$ son los distintos valores que toma la función $g(x_1, \ldots, x_n)$ bajo las *n*! permutaciones de las raíces, entonces *k* divide a *n*! y este resultado es la base de lo que ahora se conoce como Teorema de Lagrange en la Teoría de Grupos. Con estos resultados, es posible encontrar una ecuación resolvente $f(x) = (x - t_1) \cdots (x - t_k)$ la cual es necesario resolver. En los casos *n* = 3 y *n* = 4, las ecuaciones resolventes son de grado 2 y 3 respectivamente, mientras que para *n* = 5 la resolvente es de grado 6 y eso explica que Lagrange no haya tenido éxito en resolver la *cúbico-cuadrática*. Sin embargo, como resultado de su análisis y a pesar de no haber obtenido resultados concluyentes para ecuaciones de grado superior al cuarto, el trabajo de Lagrange sobre la resolución algebraica de ecuaciones es una parte fundamental en el desarrollo del álgebra moderna, no sólo por las respuestas que obtuvo sino por la gran influencia que ejerció en la comunidad matemática de finales del siglo XVIII y del siglo XIX. El germen de una de las grandes teorías algebraicas que transformó profundamente la matemática, la física y la química en el siglo XX, a saber, la Teoría de Grupos, se encuentra en las *Réfléxions*. Comentaremos más sobre esto en la siguiente sección.

Como ya mencionamos arriba, antes de Lagrange nadie había contemplado la posibilidad de la no existencia de métodos generales para resolver por radicales las ecuaciones de grado superior al cuarto. Más aún, es posible citar ejemplos de matemáticos que creyeron haber resuelto la ecuación de quinto grado. Tal es el caso del gran algebrista de siglo XVII, Tschirnhausen (1661-1708), quien desarrolló un método que se basaba en transformar la ecuación dada a una más simple, proceso en el cual era necesario resolver una ecuación auxiliar. Este método funcionaba muy bien para ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado; sin embargo, después se probó que al aplicarlo a la ecuación general de quinto grado, la ecuación auxiliar que previamente se debía resolver resultaba ser de sexto grado. Así, sería necesario esperar hasta el siglo XIX para que el problema quedara completamente resuelto, aunque no en el sentido que la mayoría de los matemáticos hubiera deseado.

El primer intento serio por demostrar que era imposible resolver la ecuación general de grado n por medio de radicales, para $n \geq 5$, fue hecho por Paolo Ruffini (1765-1822) en un trabajo titulado *Teoria generale delle equazioni* del año 1799. Ruffini, un matemático italiano, discípulo y admirador de Lagrange, logra probar, usando el mismo método de éste, que para las ecuaciones de grado superior al cuarto era imposible encontrar ecuaciones resolventes de grado menor que cinco. Una segunda memoria sobre el mismo tema se le publica en las Memorie di Matemática e Fisica della Società Italiana delle Scienze en1802. Posteriormente, en otro trabajo titulado *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*, que data de 1813, Ruffini presenta una versión más elaborada de sus trabajos anteriores y estudia con gran detalle las permutaciones de las raíces de una ecuación, en base a lo cual demuestra la imposibilidad de resolver algebraicamente las ecuaciones de grado superior al cuarto.

El trabajo de Ruffini fue recibido con bastante escepticismo por parte de varios matemáticos de la época, entre los que podemos citar a Malfatti, Carnot y Legendre, quienes expresaron sus dudas acerca de la validez de las demostraciones presentadas por aquél. De hecho, la prueba dada por Ruffini no era del todo concluyente pues en ella se asume que *si una ecuación es soluble por medio de radicales, entonces las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales involucrados son funciones racionales de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad* [13, p.605]. Este resultado no fue probado por Ruffini y por tal motivo sus conclusiones no eran definitivas aunque, como el mismo creía, sí eran correctas.

Fue el joven y talentoso matemático noruego, Niels Henrik Abel (1802-1829), quien tuvo éxito en demostrar que era imposible resolver por radicales las ecuaciones de grado superior al cuarto. El gran talento matemático de Abel se manifestó desde muy temprana edad por lo que a los dieciséis años su maestro de matemáticas lo animó a leer las obras de los grandes matemáticos como Euler, Lagrange y Gauss.

Todavía adolescente, Abel creyó haber encontrado un método para resolver la ecuación general de quinto grado pero pronto se percató de su error por lo que continuó sus investigaciones sobre ese problema; finalmente, en 1824, logró probar la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado mayor que cuatro. Sus resultados los publicó en un panfleto titulado *Mémoire sus les équations algébriques*, siendo él mismo quien corrió con los gastos de la publicación a pesar de su precaria situación económica. Posteriormente, en 1826, una versión más elaborada de su prueba se publicó en el Journal für die reine und angewandte Mathematik[9], de Crelle, con el título *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré*. En ambos trabajos, las ideas principales son las mismas sólo que algunas partes son mejor explicadas en el segundo y se simplifican otras.

Abel ya tenía conocimiento sobre el trabajo de Ruffini y había expresado sus dudas sobre la validez de la demostración dada por éste con respecto al problema de la no solubilidad de la ecuación general de grado n. En palabras del propio Abel: "... *su memoria es de tal manera complicada que es muy difícil juzgar sobre la justeza de sus razonamientos. Me parece que su razonamiento no es del todo satisfactorio*" (citado en [22, p. 84]. Precisamente, uno de los mayores logros de Abel fue probar lo que Ruffini había asumido implícitamente: los radicales requeridos para resolver una ecuación siempre se pueden escoger de tal manera que sean funciones racionales de las raíces de la ecuación y de ciertas raíces de la unidad.

Para probar este teorema, Abel hace uso de otros resultados obtenidos por Lagrange, Ruffini y Cauchy con relación al número de valores que una función de n variables puede tomar si éstas son permutadas. No es posible dar los detalles de la prueba de Abel pues el espacio nos impone restricciones; sin embargo, haremos unos cuantos comentarios al respecto.

Abel comienza con la ecuación de quinto grado

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0\,, \tag{4.6}$$

en la cual los coeficientes son "generales" en el sentido de que son sólo letras o variables independientes. Además, los signos de esos coeficientes no son relevantes. Si se supone que es posible expresar y como una función de los coeficientes por medio de radicales, Abel entonces demuestra que es posible escribir y como

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}\,,$$

donde m es un número primo y se supone que las cantidades $R,\ p, p_1,\ \ldots\ , p_{m-1}$ son expresiones de la misma forma que y, las cuales involucran a otros radicales y así sucesivamente hasta que se llega a funciones racionales de los coeficientes de la ecuación original.

Después de una larga serie de cálculos complicados, Abel logra probar que esas cantidades son funciones racionales de las cinco raíces de la ecuación (4.6) y de hecho, da una expresión explícita para R. Habiendo probado el resultado mencionado, Abel procede de acuerdo con los métodos desarrollados por Lagrange, Ruffini y Cauchy; a través de estos métodos, prueba que el número m sólo puede ser igual a 2 ó 5. Abel analiza ambos casos por separado y concluye que es imposible resolver la ecuación general de quinto grado por radicales. Al fin quedaba resuelto uno de los problemas que por más de dos y medio siglos había resistido los embates de muchos matemáticos destacados. Como consecuencia de este resultado, Abel puede demostrar que es imposible resolver por radicales la ecuación general de grado n, para $n \geq 5$.

[9] Revista de matemáticas puras y aplicadas.

En 1829, dos meses antes de su muerte ocurrida en el mes de abril de ese año y en una situación de pobreza extrema, Abel publicó otro trabajo en el Journal de Crelle con el título *Mémoire sur une classe particulière d'équations resoluble algébriquement* en la cual trata el problema de la división de la lemniscata, la curva con forma de 8; recuérdese que la división del círculo nos lleva a una familia de ecuaciones que son llamadas ciclotómicas. En el caso de dividir la lemniscata en arcos de igual longitud se obtiene una familia de ecuaciones algebraicas de las cuales Abel prueba que son solubles por radicales; a estas ecuaciones hoy se les llama *abelianas*. Otras nociones algebraicas importantes que Abel introduce en su estudio de la resolución de ecuaciones son la de *campo* y la de *polinomio irreducible*, las cuales vendrían a ser también centrales en el trabajo de Galois, del cual nos ocuparemos más adelante.

El trabajo de Abel es muy importante en la historia del desarrollo del álgebra; sin embargo, no daba respuesta a la pregunta de cuándo una ecuación arbitraria era soluble por radicales. Sabemos que es imposible dar métodos generales que nos permitan resolver cualquier tipo de ecuación de grado superior al cuarto (Teorema de Abel), como los que hemos descrito para las ecuaciones de grados 2, 3 y 4. No obstante, hay familias particulares de ecuaciones de grado mayor al cuarto, que sí son solubles por radicales. Este hecho ya había sido demostrado por Karl Frederick Gauss al menos desde 1801, año en que se publica su famoso libro *Disquisitiones Aritmethicae*, el cual vino a ser una fuente de inspiración para muchos matemáticos y fue fundamental para el desarrollo posterior de la teoría de números y del álgebra.

En la última sección de este trabajo, Gauss analiza y resuelve el problema de la ecuación ciclotómica (4.2), probando además que es soluble por radicales. Esto es, cualquier ecuación del tipo $x^p - 1 = 0$ (*p* un primo) puede ser resuelta por radicales pues sus raíces se pueden expresar como funciones racionales de las raíces de una sucesión de ecuaciones

$$Z_1 = 0,\ Z_2 = 0,\ \ldots,$$

cuyos coeficientes son funciones racionales de las ecuaciones precedentes de la sucesión. Los grados de estas ecuaciones son los factores primos de *p*-1, a los que corresponde una Z_i aun si se repiten factores. Además, cada ecuación $Z_i = 0$ puede resolverse por radicales por lo que la ecuación ciclotómica original se resuelve algebraicamente. De esta manera, se tiene una familia muy amplia de ecuaciones cuyas soluciones se pueden obtener por medio de radicales. Por ejemplo, si $x^5 - 1 = 0$, entonces de la expresión

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

se sigue que si α es una raíz quinta primitiva de la unidad, entonces

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{\alpha^5 - 1}{\alpha - 1} = 0.$$

Ya sabemos cómo resolver esta ecuación bicuadrática. Sin embargo, si dividimos por α^2 obtenemos

$$\alpha^2 + \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0. \tag{4.7}$$

Pero $(\alpha + \alpha^{-1})^2 = \alpha^2 + 2 + \alpha^{-2}$, en consecuencia, la ecuación (4.7) se escribe como

$$(\alpha + \alpha^{-1})^2 + (\alpha + \alpha^{-1}) - 1 = 0,$$

por lo que haciendo $\gamma = \alpha + \alpha^{-1}$ se obtiene la ecuación cuadrática

$$\gamma^2 + \gamma - 1 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

De $\gamma = \alpha + \alpha^{-1}$ se tiene

$$\alpha\gamma = \alpha^2 + 1,$$

por lo que se obtiene una ecuación cuadrática para α:

$$\alpha^2 - \alpha\gamma + 1 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}),$$

por lo que las raíces quintas primitivas de la unidad son

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{-2\sqrt{5} - 10}}{4}, \ \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}.$$

El poder resolver por radicales la ecuación ciclotómica es también muy importante desde el punto de visa geométrico pues Gauss prueba que los polígonos regulares que pueden construirse usando sólo regla y compás son aquellos que tienen *p* lados, donde *p* debe ser un primo tal que $p-1$ sea una potencia de 2. En otras palabras, *p* debe ser un primo de Fermat para poder construir un polígono regular de *p* lados; tal es el caso de los primos 3, 5, 17, 257 y 65537. Gauss mismo ya había probado, a la edad de 18 años, que era posible construir un polígono regular de 17 lados.

Es a Evariste Galois (1811-1832) a quien le corresponde el mérito de dar una respuesta definitiva al problema de la solubilidad de ecuaciones algebraicas por medio radicales y de paso, con su respuesta al problema, crearía una de las más bellas teorías algebraicas a saber, la hoy llamada Teoría de Galois, la cual ha sido una de las más grandes creaciones en la historia de las matemáticas, tanto por sus aportaciones a éstas como por los desarrollos posteriores de la teoría que han dado lugar a una rica área de investigación de las matemáticas contemporáneas.

El caso de Galois es uno muy peculiar dentro de las matemáticas pues en él se conjugaron el genio matemático y la pasión política, siendo ésta la que lo llevaría a una muerte absurda cuando apenas tenía 20 años de edad, consecuencia fatal de un balazo recibido en un duelo con pistolas cuyas causas han permanecido envueltas en el misterio. Su vida llena de dramatismo contrasta con la vida más o menos apacible de los grandes matemáticos para quienes "*… el drama de sus vidas está en sus matemáticas y no puede ser apreciado por los no especialistas*" [6, p. 1]. Ferviente defensor de la causa republicana en la convulsa Francia de la primera mitad del siglo XIX y con un odio feroz hacia todo lo que oliera a monarquía, fue perseguido por sus actividades políticas y estuvo en prisión a causa de ellas. Su talento matemático empezó a mostrarse cuando aun estaba en la escuela secundaria pues en esa época empezó a hacer importantes descubrimientos. En abril de 1829 publica por primera vez un artículo titulado *Demonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques*, en los Annales Mathématiques de Gergonne. En ese período de la vida de Galois, su interés por las matemáticas lo habían llevado a leer a los grandes matemáticos como Legendre y Lagrange, y posteriormente a Gauss y Abel. Sin embargo, su talento no fue apreciado por los examinadores de la más prestigiada escuela francesa de ciencias de la época, la *École Politechnique*, ya que en las dos ocasiones que presentó el examen de admisión fue rechazado, lo cual provocó en el joven matemático un sentimiento de frustración y de amargura que estaría presente por el resto de su vida pues consideraba que se había cometido una gran injusticia. Así, tuvo que conformarse con ingresar a la *École Normale*, a prepararse para la enseñanza.

El 25 de mayo y el 1 de junio de 1829 Galois presentó a la Academia de Ciencias de París los primeros resultados de sus investigaciones sobre la solubilidad de ecuaciones de grado primo con la intermediación de Cauchy, quien fue designado para revisar estos trabajos. Existen evidencias que permiten suponer que Cauchy sí leyó estos reportes pues los presentaría a la Academia en su sesión del 18 de enero de 1830; sin embargo, ese día Cauchy se excusó de no poder asistir a la reunión y pidió que programaran su presentación del trabajo de Galois para la sesión de la semana siguiente. Pero en esta sesión, Cauchy reportó un trabajo suyo y no hizo mención de Galois. De acuerdo con [17], cabe la hipótesis de que Cauchy haya animado a Galois a unificar y extender sus investigaciones y presentar una memoria para el Grand Prix de Matemáticas cuya convocatoria se cerraba el primero de marzo [17, 24]. Así, en febrero de 1830, Galois presentó una memoria en la cual se analizaban las condiciones para que una ecuación fuera soluble por radicales, con el fin de participar en el concurso. Dicha memoria fue asignada a Fourier en su calidad de secretario perpetuo de física y matemáticas en la Academia, para su revisión.

Después de esperar varios meses en los que no tuvo noticia alguna sobre la evaluación de esta memoria, Galois envió una carta a la Academia quejándose por el negligente trato hacia su trabajo; la respuesta que obtuvo fue: "*El asunto es muy simple. La memoria se perdió con la muerte de Cauchy, a quien se le había confiado la tarea de examinarla*" [20, p. 90]. No se sabe lo que ocurrió con esa memoria; Fourier murió el 16 de mayo de ese año y jamás pudo ser encontrada entre sus papeles por lo que no participó en el concurso.

A pesar de su gran frustración, Galois publicó varios trabajos en el período de abril a junio de 1830 en el prestigioso *Bulletin de sciences mathematiques, physiques et chimiques* dirigido por el Barón de Férussac; estos trabajos fueron: un resumen de la memoria enviada al Grand Prix, *Analyse d'une mémoire sur la résolution algébrique des équations*, en la que se enunciaban sin demostración los teoremas principales que aquélla contenía; un artículo titulado *Notes sur la résolution des équations numériques*; también un artículo muy importante de título *Sur la théorie des nombres*.

Por invitación de Poisson, Galois volvió a reescribir la memoria que le habían extraviado, presentándola de nuevo a la Academia el 17 de enero de 1831, con el título *Mémoire sur les Conditions de Résolubilité des Équations par Radicaux*. Esta vez, los revisores designados fueron Lacroix y Poisson. Finalmente, en julio, no sin algunos contratiempos, vino la respuesta de la academia [17]:

> Estimado Sr. Galois:
>
> Su artículo fue enviado al Sr. Poisson para su revisión. El lo ha regresado con su reporte, que ahora citamos:

"Hemos hecho todo esfuerzo para entender las demostraciones del Sr. Galois. Su argumento no es lo suficientemente claro ni lo suficientemente desarrollado de tal manera que nos permita juzgar su rigor; ni siquiera es posible para nosotros darnos una idea sobre este artículo.

El autor afirma que las proposiciones contenidas en el manuscrito son parte de una teoría general la cual tiene muchas aplicaciones. Con frecuencia, diferentes partes de una teoría se aclaran unas a otras y se pueden entender más fácilmente cuando son tomadas juntas en vez de aisladas. Por lo tanto, deberíamos mejor esperar para formarnos una opinión más definida, hasta que el autor publique una versión más completa de su trabajo"

Por esta razón, le estamos regresando el manuscrito esperando que encuentre útiles las observaciones del Sr. Poisson para su trabajo futuro.

François Arago, Secretario de la Academia.

Esta memoria que fue recuperada por Galois, la cual releyó durante la noche anterior al duelo haciéndole algunas correcciones y anotaciones, ha sido uno de los más grandes testamentos científicos en la historia de las matemáticas. Todas las proposiciones y teoremas que Galois enunciaba eran correctos. Algunas demostraciones requerían de ciertos retoques pues estaban sólo esbozadas, muy al estilo de Galois; sin embargo, resultan impresionantes, aun hoy, la claridad y la profundidad de las ideas de su autor, así como la seguridad de éste sobre la importancia de sus resultados.

Comentaremos a grandes rasgos algunos aspectos de esta memoria. Galois comienza introduciendo algunas ideas ya que si se pretende analizar una ecuación polinomial $f(x)=0$, entonces uno debe suponer que sus coeficientes son cantidades conocidas y pueden ser números racionales, irracionales o simplemente letras. Cualquier función de estos coeficientes es llamada una *función racional*. Además, es necesario *adjuntar* algunas otras cantidades a las ya conocidas, tales como raíces *n*-ésimas de la unidad y Galois establece que "*llamaremos **racional** a toda cantidad que se exprese como función racional de los coeficientes de la ecuación y de un cierto números de cantidades **adjuntadas** a la ecuación y arbitrariamente convenidas*" [23, p. 35]. Galois, al igual que Abel, tenía muy claro el concepto de lo que hoy llamamos **campo**, que es donde *viven* los coeficientes de la ecuación. Al adjuntar otras cantidades, uno va construyendo **extensiones** del campo base y estas extensiones también son campos. Otra noción importante es la de irreducibilidad de polinomios que Galois define de una manera apropiada: si un polinomio se puede factorizar en el campo base, se llama **reducible**; en caso contrario, se llama **irreducible**. Por ejemplo, si el campo base es el conjunto de todas las fracciones (números racionales), entonces el polinomio x^3-x^2-4x-6 es reducible pues $x^3-x^2-4x-6=(x^2+2x+2)(x-3)$, mientras que el polinomio x^3+3x^2+3x-5 es irreducible en este campo. Una ecuación que es irreducible en el campo original, dice Galois, puede volverse reducible al adjuntarle al campo una cantidad. Un ejemplo sencillo donde se puede apreciar esto es el siguiente: Consideremos la ecuación $x^2+1=0$. El polinomio $p(x)=x^2+1$ es irreducible en $\mathbf{Q}$, el campo de los números racionales; sin embargo, si adjuntamos la unidad imaginaria i a este campo, entonces obtenemos el campo $\mathbf{Q}(i)$ en el cual ese polinomio es reducible pues se puede factorizar como $p(x)=x^2+1=(x-i)(x+i)$. De esta manera, las raíces de la ecuación son i y $-i$, que *viven* en $\mathbf{Q}(i)$, una extensión del campo base.

Otro concepto fundamental en el trabajo de Galois es el de **grupo** (de permutaciones); a él le corresponde el mérito de ser el primero en usar el término "grupo" en un sentido técnico, como una colección de permutaciones cerradas bajo la composición: "*si uno tiene en el mismo grupo las sustituciones S y T uno deberá tener la sustitución ST*" [23, p.36]. Estas sustituciones no son más que permutaciones de las raíces de una ecuación. Por ejemplo, supongamos que *a, b, c* son las raíces de una ecuación cúbica, y que las permutaciones *S* y *T* son

$$S: \begin{array}{l} a\to b \\ b\to c \\ c\to a \end{array} \qquad\qquad T: \begin{array}{l} a\to b \\ b\to a \\ c\to c \end{array}$$

Entonces, el "*producto de S y T*" es la permutación *ST* que para Galois es el resultado de aplicar primero *S* y luego *T*:

$$ST: \begin{array}{l} a\to a \\ b\to c \\ c\to b \end{array}$$

Estos conceptos son la base de una teoría general de la cual Galois tenía una idea muy clara, lo cual podemos constatar en sus escritos. Así, en la introducción de la memoria que nos ocupa, escribe: "*… me debo conformar con describir, de una manera sintetizada, los principios generales y una sola aplicación de mi teoría*" [23, p.33]. La aplicación de la que habla es precisamente la solubilidad de ecuaciones por radicales pues mediante esta teoría las principales propiedades de una ecuación se reflejan en ciertas propiedades de un grupo asociado a la ecuación, que hoy llamamos el **grupo de Galois de la ecuación**. La existencia de este grupo y de sus propiedades son probadas por Galois en su memoria [23, p. 38]:

> Sea una ecuación dada cuyas *m* raíces son *a*, *b*, *c*,… Existirá siempre un grupo de permutaciones de las letras *a*, *b*, *c*,… que tiene la siguientes propiedades: 1) que toda función de las raíces, invariante bajo las sustituciones del grupo, es racionalmente conocida. 2) recíprocamente, que toda función de las raíces, determinada racionalmente, es invariable por las sustituciones.

Enseguida Galois investiga cómo cambia el grupo de la ecuación al ir adjuntando nuevas cantidades al campo base; le queda claro que el nuevo grupo será un **subgrupo** del grupo original. Si denotamos por *G* al grupo original y por *H* al subgrupo que se obtuvo al adjuntar una raíz, entonces es posible descomponer *G* como

$$G = H + Hs + Hs' + Hs'' + \ldots$$

o bien como

$$G = H + tH + t'H + t''H + \ldots,$$

Donde s, s', s'', … t, t', t'', … son sustituciones (permutaciones) del grupo. Estas descomposiciones no siempre coinciden, pero cuando lo hacen, el subgrupo *H* se dice ser un **subgrupo normal** (Galois llama a la descomposición, en este caso, *propia*). El número de términos que ocurren en la descomposición anterior es lo que ahora se llama el **índice del subgrupo H en el grupo G** y se denota por $[G{:}H]$. Con cada adjunción de una cantidad al campo base se obtiene un subgrupo del grupo original y Galois puede probar que una ecuación polinomial $f(x)=0$ es soluble por radicales sí y sólo si es posible encontrar una sucesión de subgrupos

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots H_m = (e),$$

donde cada H_k es un subgrupo normal de H_{k-1}, de tal manera que todos los índices $[H_k : H_{k-1}]$ son números primos. El subgrupo (e) es el subgrupo trivial de un elemento formado por la permutación identidad. En la terminología moderna, decimos que el grupo G es **soluble**.

En el caso de la ecuación general de quinto grado, su grupo es S_5, el grupo de permutaciones de cinco objetos, que tiene 5! = 120 elementos. La única sucesión de subgrupos que es posible encontrar es, en notación moderna,

$$S_5 \supset A_5 \supset (e),$$

donde A_5 es el único subgrupo normal de S_5 y tiene 60 = 120/2 elementos. Por lo tanto los índices son $[S_5 : A_5]$ =120/60 = 2, que es primo. Pero $[A_5 :(e)]$ = 60/1 = 60, el cual no es primo. Por lo tanto falla la condición de solubilidad para S_5 lo cual implica que la ecuación general de quinto grado no se puede resolver por radicales. En general, el grupo S_n no es soluble para $n \geq 5$, por lo tanto es imposible resolver por radicales la ecuación general de grado n. De hecho, la única sucesión de subgrupos en este caso es

$$S_n \supset A_n \supset (e),$$

donde A_n es el **subgrupo alternante** de S_n que consiste de todas las permutaciones pares, es decir, aquellas permutaciones que son productos de un número par de 2-ciclos; éste es el único subgrupo normal de S_n para $n \geq 5$. El total de elementos de A_n es $n!/2$ y por eso el índice $[A_n :(e)]$ no puede ser primo, lo cual implica la no solubilidad de S_n.

Como hemos visto, esta memoria de Galois no fue entendida por los matemáticos de la Academia de Ciencias a quienes les fue encomendada para su revisión; tuvieron que pasar catorce años después de la muerte de Galois para que fuera publicada por Joseph Liouville en su *Journal de Mathématiques Pures et Apliquées*, en 1846. En esta edición, Liouville hace algunos comentarios sobre la memoria y nos cuenta del gran regocijo que sintió, después de llenar unas cuantas omisiones leves por parte de Galois, al verificar que los resultados propuestos por éste eran completamente correctos.

Otros problemas que es posible resolver por medio de la teoría de Galois son los relativos a construcciones con regla y compás. En particular, es fácil probar que los tres problemas griegos, a saber, la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, son imposibles de resolver usando sólo regla y compás como se exigía en la versión original de los mismos.

Desafortunadamente, por falta de espacio no es posible comentar sobre otras aportaciones de Galois al álgebra, sobre todo las que tienen que ver con la memoria *Sur la théorie de nombres*, en la cual se inicia el estudio de lo que hoy se llaman **campos de Galois**, los cuales son muy importantes en el álgebra contemporánea.

La vida de Galois es como una novela romántica [6, p. 1] en la que muchos de sus episodios permanecen en la completa oscuridad, lo cual ha propiciado una gran cantidad de especulaciones sobre las circunstancias en las que ocurrió su muerte. Hay autores que hablan de Galois como un genio incomprendido y rechazado por el *establishment* matemático de la época, cuyas ideas políticas lo llevaron a granjearse muchos enemigos y que su muerte ocurrió por batirse en duelo a causa de una disputa provocada por una prostituta (E. T. Bell, *Men of Mathematics*). Otra versión hace de él un genio matemático, "elegido de los dioses", en la cual la prostituta es reemplazada por una espía de la monarquía, al igual que su ejecutor, y su muerte fue el producto de una conspiración (L. Infeld, *El elegido de los Dioses*). Más aún, en su libro *Evariste Galois. 1811-1832*, Laura Toti Rigatelli, basada en cierta evidencia que no había sido considerada anteriormente, da una versión muy distinta a las anteriores; en el capítulo final escribe: "*El rechazo de Stéphanie [Poterin-DuMotel] devastó a Galois cuyo ferviente espíritu esperaba encontrar en su amor por ella lo que la ciencia le había negado. Pasó los últimos días de su sentencia*[10] *esperando impaciente por retornar a su militancia política, la cual era todo lo que le quedaba para poder hacer su vida digna de vivirla. Había perdido toda esperanza con respecto a Stéphanie. Ella nunca lo amaría, y las matemáticas, su otro gran amor, también lo habían traicionado, de cierta manera. Si bien convencido de que sus teorías eran exactas, y de que eran válidas para el futuro del álgebra, estaba consciente de que mantener la esperanza de que serían entendidas por el establishment académico de París era una soberana locura. Su única esperanza ahora era su fe en los ideales republicanos, y estaba ansioso por reunirse con la Sociedad de los Amigos del Pueblo*[11]" [20, p. 107]. De acuerdo con esta autora, Galois, en su afán de ser útil a su patria se ofreció a ser sacrificado con el fin de dar un pretexto a sus compañeros republicanos para que pudieran incitar a la gente a levantarse en armas y derrocar al monarca francés, pues se les haría creer que los policías del rey habían asesinado al joven matemático. Todo sería planeado cuidadosamente; en el funeral se esparciría el rumor de que su muerte se debió a un complot de la policía lo cual sería el detonante para la revuelta. El duelo tuvo lugar el 30 de mayo en las primeras horas de la mañana y Galois fue herido mortalmente en el estómago. Murió el jueves 31, alrededor de las diez de la mañana. Su funeral tuvo lugar el día 2 de junio al mediodía y "*alrededor de 3000 personas estaban presentes, listas para atacar a la policía tan pronto como el féretro hubiese sido depositado en la tumba. La artillería de la Guardia Nacional también estaba sobre aviso*" [20, p. 113]. Sin embargo, continúa Toti Rigatelli, justo en el sepelio se esparció la noticia de la muerte del General Maximilien Lamarque, quien había sido un bonapartista muy respetado, y los líderes de la Sociedad de los Amigos del Pueblo pensaron que en el funeral de este admirado soldado habría una cantidad mayor de gente, en un ambiente emocional más propicio, a la cual se podría incitar a la revuelta y por lo tanto esperarían un par de días más para el levantamiento[12]. Así, concluye esta autora, el sacrificio de Galois fue sin sentido.

El lector podrá encontrar una amplia literatura sobre la vida y obra de Galois. Una de las fuentes principales es [5] y aunque en esta biografía no se incluyen algunos documentos importantes sí es una de las más completas y confiables. Sin embargo, hay algunas otras que se apartan mucho de la verdad por lo que debemos tener bastante cuidado con aquellas obras que presentan una vida ficticia de Galois; una investigación muy valiosa se encuentra

[10] Había sido sentenciado a seis meses de prisión que se cumplirían el 29 de Abril de 1832.
[11] La Sociedad de los Amigos del Pueblo era una organización republicana de tendencias radicales.
[12] El 4 de junio ocurrió una revuelta en las calles de París.

en [17] y nos advierte de los errores cometidos por varios autores al hablar sobre la vida de este gran genio matemático, cuya obra vendría a transformar el álgebra como nunca antes.

Entre los primeros que estudiaron y continuaron los trabajos de Galois fueron el propio Liouville, Charles Hermite, Victor Puiseux y Joseph-Alfred Serret. Este último tomó algunos cursos con Liouville sobre la Teoría de Galois y publicó en 1854 un libro titulado *Cours d'Algebre Supérieure*, cuya tercera edición de 1866 incluye un capítulo dedicado a exponer esta teoría. Las dos ediciones anteriores no la incluían debido al anuncio hecho por Liouville de publicar las *Obras de Galois*, lo cual nunca llevó a cabo. Sin embargo, el primero en hacer una exposición completa de esta teoría y presentar en forma detallada todas las demostraciones fue Enrico Betti, en 1852. Después de éste, Camille Jordan publicaría en 1870 un tratado que tuvo mucha influencia en el desarrollo posterior de la teoría de grupos y de la teoría de Galois; comentaremos sobre esto en la siguiente sección.

5. GRUPOS DE PERMUTACIONES Y GRUPOS ABELIANOS.

Una aportación fundamental de Lagrange en el desarrollo del álgebra es el hecho de que sus métodos mostraron la importancia que tiene el estudio de las permutaciones de las raíces de una ecuación algebraica con respecto a sus soluciones. Lagrange mismo consideraba que en ese estudio residía "*la verdadera filosofía de todo el problema*" [14]. De hecho, de acuerdo con [12], "*era la primera vez que se hacía una asociación entre las soluciones de una ecuación polinomial y las permutaciones de sus raíces*". Este punto de vista de Lagrange era del todo correcto como se puede apreciar en el trabajo de Galois.

Por otra parte, desde 1815, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) empezó a hacer importantes aportaciones a la teoría de los grupos de permutaciones; de hecho, a él se debe el que esta teoría se haya desarrollado de manera autónoma, pues antes de Cauchy sólo se estudiaba a las permutaciones en relación con la teoría de ecuaciones. Un resultado importante publicado por Cauchy en ese año tiene que ver con los distintos valores que puede tomar una función racional no-simétrica en *n* variables. Ruffini había probado que en el caso de una variable el número de valores distintos no puede ser menor que 5, a menos que sea 2. Cauchy lo generaliza para el caso de *n* variables y su resultado es usado por Abel para probar su famoso teorema.

Otro período muy fructífero para Cauchy en lo que respecta a grupos de permutaciones es de 1844 a 1846; en estos años publica varios artículos en los que prueba algunos teoremas que son muy importantes en la teoría moderna de grupos. Además de esto, Cauchy introduce una notación que es muy usada para denotar una permutación. Por ejemplo, consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces una permutación es una función biyectiva de X en sí mismo. Al conjunto de todas estas funciones se le denota por S_4 y este conjunto junto con la composición de funciones viene a ser un grupo llamado el **grupo de permutaciones de cuatro objetos**, que tiene 4! = 24 elementos. Un elemento típico de este grupo es la función (permutación)

$$f: \begin{array}{l} 1 \to 2 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 4 \\ 4 \to 1 \end{array}$$

Cauchy denota esta permutación como $f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$ y también, en notación cíclica, como f = (1234); esta simbología ha perdurado hasta nuestros días. De entre los resultados más importantes demostrados por Cauchy citamos los siguientes:

1) Toda permutación es un producto de 3-ciclos (es decir, permutaciones de la forma (*abc*) en la que *a* es *llevado* a *b*, *b* es *llevado* a *c* y *c* es *llevado* a *a*, formando así un ciclo.)
2) Si un número primo *p* es divisor del número de elementos de un grupo, entonces el grupo contiene un subgrupo con *p* elementos.

Un trabajo que vendría a unificar las ideas de Galois (grupos ligados a ecuaciones) y de Cauchy (grupos de permutaciones *per se*) fue el de Camille Jordan (1838-1922). Su famoso libro *Traité des substitutions et des équations algébriques*, que fue publicado en 1870, tuvo mucha influencia en el desarrollo de la teoría de grupos pues no sólo aplicó el concepto de grupo a la teoría de ecuaciones sino también a la geometría algebraica, a las funciones trascendentes y a la mecánica teórica. De hecho, como lo expresa Klein (citado en [12]): "*En este libro Jordan deambula por toda la geometría algebraica, la teoría de números y la teoría de funciones, buscando grupos de permutaciones interesantes*". Otra opinión con respecto a este tratado de Jordan, que vale la pena mencionar, es la de van der Waerden: "*El trabajo monumental de Jordan de 667 páginas… es una obra maestra de arquitectura matemática. La belleza del edificio erigido por Jordan es admirable*" [22].

En su tratado, Jordan introduce varias nociones fundamentales en la teoría de grupos tales como el concepto de **homomorfismo**, el de **isomorfismo** y el de **grupo soluble**. También define el concepto de **serie de composición** para un grupo (de permutaciones) y prueba parcialmente el famoso teorema de Jordan-Hölder el cual establece que cualesquiera dos series de composición para un grupo son *equivalentes* por lo que todo grupo que tenga una serie de composición determina una lista única de **grupos simples**, esto es, grupos de permutaciones que no tienen subgrupos normales no triviales. En este contexto, Jordan prueba que los grupos A_n son simples para $n \geq 5$.

Más adelante, en la sección 7, comentaremos sobre otras aportaciones de Jordan y la influencia de su tratado. Por ahora es conveniente revisar otro aspecto de la teoría de grupos, aquella que tiene que ver con la Teoría de los Grupos Abelianos.

Se puede decir que Gauss, en sus *Disquisitiones*, es quien comienza el estudio de los grupos abelianos finitos y obtiene muchos resultados sin usar la terminología de la teoría de grupos. Los objetos con los que trata Gauss y que ahora damos como ejemplos importantes de grupos son: el grupo aditivo de los enteros módulo *n*; el grupo multiplicativo de enteros que son primos relativos con *n*, módulo *n*; el grupo de clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias, y el grupo de las raíces *n*-ésimas de la unidad. Por ejemplo, el grupo aditivo de los enteros módulo *n* es el conjunto de clases residuales módulo *n*, es decir, las *clases de equivalencia* de la relación de **congruencia módulo** *n*: dos enteros *a* y *b* son congruentes módulo *n* si existe un entero *q* tal que $b - a = qn$, lo cual se denota por $b \equiv a \bmod n$, concepto introducido por Gauss. Esta es una relación de equivalencia en el conjunto de los enteros $\mathbf{Z}$ y parte a los enteros en clases de equivalencia que denotamos por $\mathbf{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ y la **suma módulo** *n* es una operación definida entre los elementos de $\mathbf{Z}_n$. En particular, cuando *p* es un número primo, Gauss prueba que el conjunto $\mathbf{Z}_p^{\,*} = \{\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ es un grupo multiplicativo cíclico, esto es, todos sus elementos se generan como potencias de uno sólo de ellos. Más aun, usando argumentos propios de la teoría de grupos, Gauss prueba el pequeño teorema de Fermat: Si *p* no divide al entero *a*, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

En todos los casos que se mencionaron arriba, la operación definida entre los elementos del grupo es conmutativa y son lo que llamamos **grupos abelianos**. Muchos de estos grupos provienen de la Teoría de Números y aunque el concepto de grupo está implícito en estos desarrollos, no se usó el término “grupo” en este contexto sino hasta el último tercio del siglo XIX. Algunos matemáticos que contribuyeron de manera significativa en esta área fueron, entre otros, G. L. Dirichlet, E. Kummer, L. Kronecker, G. Frobenius y L. Stickelberger.

6. NÚMEROS COMPLEJOS Y NUEVAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

A lo largo de las tres partes que conforman este trabajo hemos señalado ciertos eventos que han sido determinantes en el desarrollo del álgebra y en esta sección tendremos oportunidad de apuntar uno más de tales sucesos. Se trata del descubrimiento de las leyes que gobiernan el gran universo de los números complejos.

Ya hemos visto que los números complejos habían sido objeto de consideración desde los tiempos de Cardano, de quien podemos decir que fue el primero en multiplicar dos números complejos. Posteriormente Bombelli trató de aclarar los puntos obscuros de aquél y va un poco más allá que Cardano en su entendimiento de estos números (ver Parte II).

Algunos matemáticos que trabajaron con números complejos como raíces de polinomios, aunque sin estar plenamente conscientes de su verdadero significado, fueron Girard, Descartes, Harriot, Leibniz, Wallis, Newton y Maclaurin entre otros. Sin embargo, en 1702, Jean Bernoulli muestra que existe una relación entre $\tan^{-1} x$ y el logaritmo de un número complejo, con lo cual contribuyó a traer a la escena del análisis a estos números. Otro importante paso se da hacia 1710 cuando el matemático británico Roger Cotes (1682-1716) prueba que

$$\log(\cos\theta + i\sin\theta) = i\theta\,,$$

y de esta relación se sigue la fórmula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,,$$

la cual es llamada fórmula de Euler. También en 1730 De Moivre sugiere la fórmula que lleva su nombre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,.$$

Euler, por otra parte, contribuyó de manera significativa en darles un estatus a los números complejos, a pesar de que en su influyente libro *Introducción al Álgebra* podemos leer:

> Debido a que todos los números concebibles son o bien mayores que cero o bien menores que cero o igual a cero, entonces, es claro que la raíz cuadrada de números negativos no puede ser incluida entre los posibles números [números reales]. Consecuentemente, debemos decir que estos son números imposibles. Y esta circunstancia nos lleva al concepto de que tales números, los que por su naturaleza son imposibles, son ordinariamente llamados imaginarios, pues existen sólo en la imaginación.

Pero esta posición no debe sorprendernos pues a pesar del crecimiento tan impresionante que tuvieron las matemáticas en los siglos XVII y XVIII, es posible encontrar posiciones de matemáticos reconocidos de la época, en contra del uso de los números complejos; incluso los hay que no tienen empacho en afirmar que los números negativos o los complejos no eran verdaderos números y así De Morgan consideraba absurdo manejar números menores que cero. A pesar de ello, los números complejos son aceptados pues los matemáticos se dan cuenta del mundo de posibilidades que estos ofrecen.

Euler introduce la notación $i = \sqrt{-1}$ y prueba que la fórmula de De Moivre se cumple para todos los valores de *n*; además, demuestra que

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Un paso que también fue muy importante en la comprensión de los números complejos se dio con la representación gráfica de éstos. Si bien es posible encontrar ciertas ideas en esa dirección en los trabajos de algunos matemáticos del siglo XVIII, como Wallis y Kühn, es en 1797 que Caspar Wessel explica claramente la manera de representar los números complejos como puntos del plano. Sin embargo, el trabajo de Wessel, publicado en 1798, pasó desapercibido por lo que se considera a Gauss como el que dio un completo sentido a esa representación gráfica al identificar un número complejo $a + bi$ con el punto (a,b) del plano. Ya hemos visto que Gauss usó esta representación para dar una prueba del teorema fundamental del álgebra. De hecho, a él le debemos el término "número complejo". Además, esa idea la expresa claramente en una carta dirigida a Bassel en 1811 (citado en [3, p. 221]):

> Del mismo modo que puede representarse todo el dominio de las cantidades reales por medio de una línea recta indefinida, puede uno figurarse el dominio completo de todas las cantidades, las reales y las imaginarias, por medio de un plano indefinido, en el que cada punto, determinado por su abscisa a y su ordenada b, representa a la vez la cantidad $a+ib$. El paso continuo de un valor de x a otro se efectúa por consiguiente siguiendo una línea, y puede efectuarse, por tanto, de infinitas maneras …

A Gauss le corresponde el mérito de haber sido el primero en aplicar esta idea a la teoría de los números complejos y pudo formarse una imagen muy clara de los logros que el siglo XIX deparaba para el análisis complejo y la teoría de funciones.

Por otra parte, la estructura algebraica de los números complejos estaba claramente definida pues la suma y el producto de complejos se entendían desde mucho antes de la representación gaussiana. Sabemos que si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos entonces sus suma es

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

y su producto viene dado por

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \ .$$

Estas operaciones son asociativas y conmutativas; además, $z\,(v+w) = zv + zw$, la llamada propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Por otra parte, si vemos cada número complejo como un pareja ordenada de números reales, esto es como un elemento del plano $\mathbf{R}^2$ ¿cuáles deben ser las operaciones en $\mathbf{R}^2$ que correspondan a la suma y al producto de complejos? La respuesta a esta pregunta la dio William Rowan Hamilton (1805-1865) en el año de 1833, al definir una suma y un producto de parejas ordenadas de reales de la siguiente manera:

Suma:

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$[\ (a,b), (c,d)\ ] \mapsto (a,b) + (b,c)$$

Producto:

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$[\ (a,b), (c,d)\ ] \mapsto (a,b) \cdot (c,d)$$

donde

$$(a,b) + (b,c) = (a+b,\ c+d) \qquad (a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)\,.$$

Esto vino a darle una estructura algebraica al plano $\mathbf{R}^2$ la cual se corresponde con la del conjunto $\mathbf{C}$ de los números complejos.

Esto fue un triunfo del álgebra pues se empezaron a vislumbrar otro tipo de estructuras (vectores) que no eran números en el sentido usual del término, pero estos nuevos objetos obedecían ciertas reglas de operación, de manera similar a las reglas de operación acostumbradas que se conocían para los números.

Después del éxito con los complejos, Hamilton se avocó a darle estructura a las tripletas de números reales; quería encontrar operaciones (suma y multiplicación) para objetos de la forma (a, b, c), donde a, b, c son números reales, que extendieran la suma y el producto de $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{C}$), de la misma manera que la suma y el producto de complejos extienden la suma y el producto de números reales. Para la suma no había ningún problema pues sólo había que sumar componente a componente; la operación elusiva era el producto.

Después de mucho tiempo (alrededor de diez años), Hamilton se dio cuenta de que el problema de resolvía sólo con cuartetas de números reales de la forma

$$q = a + bi + cj + dk\,,$$

donde a,b,c,d son números reales y las "unidades imaginarias" i, j, k satisfacen las relaciones $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Este sistema, al cual Hamilton llamó de los **cuaternios**, hizo su aparición el 16 de octubre de 1843 "en un momento de inspiración divina" que el propio Hamilton describe así: "*Entonces sentí cerrarse el circuito galvánico del pensamiento; y las chispas que cayeron desde él fueron las relaciones fundamentales entre i, j, k, exactamente como las he usado desde entonces*" [25, p. 137]. Ese momento tuvo lugar en una caminata a lo largo del canal real, cuando Hamilton se dirigía a una reunión de la Real Academia Irlandesa, en Dublín. El mismo Hamilton cuenta que sacó su navaja de bolsillo y grabó en un puente que estaba en el lugar esas relaciones fundamentales.

El sistema de los cuaternios tiene una estructura algebraica pues es posible sumar y multiplicar estos "números"; además, estas operaciones extienden la suma y producto de complejos. Sin embargo, la multiplicación de cuaternios no es conmutativa. (No es difícil probar que es imposible definir un producto en $\mathbf{R}^3$ que satisfaga propiedades análogas al producto de los complejos y que además extienda el producto de $\mathbf{C}$.)

La suma y el producto de cuaternios se definen como sigue:
Si $q = a + bi + cj + dk$ y $q' = a' + b'i + c'j + d'k$, son dos cuaternios, entonces

$$q + q' = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$
$$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + \\ + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

De la definición del producto y de las relaciones para las unidades *i, j, k*, es fácil ver que

$$qq' \neq q'q .$$

Notemos que cada cuaternio $q = a + bi + cj + dk$ lo podemos identificar con una cuarteta ordenada de números reales (a, b, c, d), por lo que obtenemos una estructura algebraica para $\mathbf{R}^4$. De nuevo, esto fue todo un suceso pues pronto se vio a muchos matemáticos buscando estructuras algebraicas para el espacio $\mathbf{R}^n$, lo cual también motivó el estudio de los sistemas hipercomplejos y, en general, de las álgebras. Otra estructura algebraica se da para $\mathbf{R}^8$, lo que se llama el sistema de los **octonios** o números de Cayley; sin embargo, en este caso la multiplicación de octonios, aparte de no ser conmutativa tampoco es asociativa, lo que nos habla de una estructura algebraica muy pobre.

Cuando Hamilton descubrió los cuaternios, ya gozaba de merecida fama pues había hecho varias contribuciones fundamentales a la física y a la matemática. A partir de su descubrimiento, se dedicó el resto de su vida a promover el cálculo cuaterniónico y escribió dos textos con ese fin: *Lectures on Quaternions*, en 1853, y *Elements of Quaternions*, en 1866. En ambos detallaba el álgebra de los cuaternios y la manera en que éstos podían ser usados en la geometría.

Al mismo tiempo que Hamilton hacía su descubrimiento de los cuaternios, en Alemania Hermann Grassmann (1809-1877) sentaba las bases para su *cálculo de la extensión* y sus investigaciones fueron publicadas en 1844 en un libro titulado *Ausdehnnungslehre*, que literalmente significa *Teoría de la Extensión*. En este tratado se proponía un nuevo cálculo, el cálculo vectorial, y esta nueva teoría de la extensión no es otra cosa que álgebra lineal. Este trabajo de Grassmann no fue apreciado por los matemáticos de su época, en parte por su difícil lectura pues incorporaba muchas ideas filosóficas al mismo. En 1862, Grassmann reescribió su trabajo pero, de nuevo, sus ideas no fueron apreciadas, a pesar de que "*El álgebra geométrica con la que había soñado Leibniz, y en la cual el concepto de número real es ampliamente asimilado, fue creada por Hermann Grassmann a mediados de siglo XIX*" [7].

Grassmann tenía una idea muy clara de los alcances de su trabajo y citamos sus palabras [9, p. 12]: "… *Comenzando pues, a repasar los resultados obtenidos hasta entonces, en forma* *conexa y empezando desde el principio, sin basarme en ningún teorema demostrado en alguna rama de las matemáticas, resultó que el análisis que había encontrado no correspondía únicamente como me pareció al principio, al campo de la geometría, sino que había llegado a una ciencia nueva, de la que la geometría era sólo una aplicación particular*". Más adelante continúa: "… *debiendo existir una rama de las matemáticas que desarrolle en forma puramente abstracta leyes análogas a las que aparecen en la geometría ligadas al espacio. Mediante el nuevo análisis se hizo posible construir una tal rama puramente abstracta de las matemáticas*" [9, p.12]. Ese nuevo análisis, como lo llama Grassmann, es lo que ahora llamamos álgebra lineal. El por qué esta nueva teoría matemática pasó casi desapercibida para los matemáticos de la época es algo difícil de precisar, quizá las ideas de Grassmann, al igual que las de Galois, hayan sido muy abstractas para la época en que aparecieron.

Por otra parte, nociones fundamentales del álgebra lineal tales como la de espacio vectorial, subespacio, dimensión, independencia lineal, combinación lineal, proyecciones de vectores sobre subespacios, producto exterior, producto interior, transformaciones lineales, valores y vectores propios, etcétera, están presentes en esa teoría de la extensión. Algunos de esos conceptos sólo son mencionados implícitamente pero es clara la percepción que Grassmann tenía de ellos. Más aún, da la representación matricial para una transformación lineal y define su determinante; también muestra que los vectores propios que corresponden a valores propios distintos son independientes y prueba el teorema espectral para una transformación lineal simétrica real, a saber, que ésta siempre tiene valores propios que son reales. Podemos seguir citando muchos otros resultados importantes que aparecen en el libro de Grasmann pero el espacio nos impone restricciones; baste decir que con los trabajos de Hamilton y de Grassmann se inaugura una época muy fructífera de las matemáticas en la cual se comienzan a estudiar otras estructuras, diferentes a las numéricas, en las que es posible calcular con objetos que no son números y, lo más importante, estos cálculos tienen pleno significado.

Debemos señalar que Grassmann no fue el primero en introducir nociones propias del álgebra lineal. De hecho, como se mencionó en la Parte I, los egipcios, en el ocaso de su civilización, ya resolvían sistemas de ecuaciones; también se mencionó en la sección 2 que Leibniz ya había introducido la idea del determinante asociado a un sistema de ecuaciones; además, en 1750 Gabriel Cramer (1704-1752) presenta una fórmula para resolver sistemas de ecuaciones lineales que se basa en el determinante del sistema, la cual ahora conocemos como fórmula de Cramer.

Por otro lado, uno de los primeros usos de la matrices se da en el trabajo de Lagrange sobre formas bilineales, aunque no de manera explícita. Gauss también contribuyó al área con su método de eliminación gaussiana, mucho antes de que apareciera el libro de Grassmann. De hecho, unos diez años después de la publicación de la *Teoría de la extensión* ya se tenía una **álgebra de matrices** desarrollada por Cayley y J. J. Sylvester (1814-1897), y posteriormente B. Peirce (1809-1880) hizo también contribuciones importantes.

El término "matriz" fue introducido por Sylvester en 1848 en su intento de elaborar un lenguaje algebraico más adecuado para el estudio de los determinantes. Sin embargo, el álgebra de matrices se desarrolló a partir de un trabajo de Cayley sobre transformaciones lineales. Dadas dos transformaciones del plano en sí mismo

$$S: \begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad\qquad T: \begin{aligned} x'' &= a'x' + b'y' \\ y'' &= c'x' + d'y' \end{aligned}$$

su composición *TS* es de nuevo una transformación lineal que se obtiene de aplicar *S* y luego *T*:

$$TS: \begin{aligned} x'' &= (a'a+b'c)x + (a'b+b'd)y \\ y'' &= (c'a+d'c)x + (c'b+d'd)y \end{aligned}$$

Notemos que los coeficientes de esta transformación se obtienen a través del producto de las matrices formadas por los coeficientes de las transformaciones originales:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}.$$

El álgebra de matrices permaneció sin ser estudiada profundamente durante casi todo el siglo XIX. A pesar de que W. Gibbs llevó el análisis vectorial y la teoría de matrices a estadios más avanzados, había una tendencia más marcada a favorecer el análisis vectorial que el álgebra de matrices, que permanecían asociadas a transformaciones lineales. Con el trabajo de Grassmann y con la definición de espacio vectorial dada por G. Peano en 1888, se vio que el análisis vectorial era parte de la teoría de Grassmann. Pronto se produjo un marcado interés en los vectores y en esa teoría; espacios vectoriales abstractos cuyos elementos eran funciones o transformaciones lineales fueron estudiados por sus conexiones con la física y con otras ramas de las matemáticas como análisis y ecuaciones diferenciales.

Un mayor interés por el estudio de las matrices como entes por sí mismos se produjo después de la Segunda Guerra Mundial con el advenimiento de las computadoras. Quienes contribuyeron en esto fueron J. von Neumann, H. Goldstine y A. Turing, entre otros muchos.

7. HACIA UNA TEORÍA ABSTRACTA DE GRUPOS

Mencionábamos en la sección 5 algunos aspectos del tratado de Jordan sobre grupos de permutaciones y la gran influencia que tuvo este trabajo en la evolución de la teoría de grupos, en general. Otro aspecto que también es importante señalar está relacionado con el estudio que hace Jordan de ciertos grupos de *sustituciones lineales*, los que en la terminología moderna, corresponden a los llamados *grupos clásicos* sobre el campo de Galois *GF(p)*, *p* un número primo. Por ejemplo, el *grupo general lineal GL(n,p)* de matrices invertibles de orden *n* con entradas en el campo finito *GF(p)*, es uno de ellos, aunque esta es la notación moderna para este grupo. Jordan logra probar que algunos de los grupos clásicos o sus subgrupos son simples.

Los grupos simples que tienen un número finito de elementos son muy importantes pues con ellos es posible construir cualquier otro grupo finito. La clasificación de todos los grupos finitos simples fue el gran anhelo de muchos matemáticos del siglo XIX. De hecho, Otto Hölder, el primer matemático en estudiar de forma abstracta los grupos simples (1889) dice: "*Sería de gran interés si una lista de todos los grupos simples con un número finito de operaciones se pudiera conocer*" (citado en [12]). Este anhelo comenzó a tener cierto sentido hacia la segunda década de siglo XX cuando ya había una lista de varias familias de grupos finitos simples y se estaban probando teoremas que hacían que los teóricos de grupos albergaran ciertas esperanzas de poder completar la lista. Ese momento llegó en 1982 y se dio la clasificación completa de estos grupos.

Es indiscutible la importancia de los *Tratados* de Jordan en el desarrollo de la teoría de grupos, que "*... eran una expresión del profundo deseo de Jordan de llevar a cabo una síntesis conceptual de las matemáticas de su tiempo...*" (ver [12]). Sin embargo, el concepto unificador de Jordan a saber, el de grupo de permutaciones, pronto quedaría rebasado con los trabajos de dos matemáticos que fueron atraídos a París por la fama de Jordan. Nos referimos a Félix Klein y a Sophus Lie, quienes permanecieron allí de abril a junio de 1870, justo cuando el libro de aquél hacía su aparición. Klein y Lie se hicieron amigos cuando este último visitó Berlín en 1869 pues sus investigaciones matemáticas tenían puntos en común. Lie había sido introducido a la teoría de grupos por L. Sylow, un matemático noruego que hizo contribuciones fundamentales a la teoría. Klein y Lie viajaron a Francia, donde tendrían un estrecho contacto con Jordan y su estancia allí fue determinante para el trabajo posterior de ambos.

Un claro ejemplo donde se puede apreciar la generalidad del concepto de grupo, ya no como los grupos de permutaciones de Jordan, Cauchy y Galois sino como **grupos de transformaciones**, es en un artículo publicado en 1871 por Klein y Lie en *Mathematische Annalen*. En este artículo, sus autores exploran la idea de grupo continuo dimensión uno y establecen la conmutatividad de éstos. Posteriormente a esta colaboración conjunta, los intereses matemáticos de ambos tomaron caminos separados aunque siempre ligados al estudio de los grupos: Lie desarrolló su teoría de los grupos continuos y la aplicó al estudio de ecuaciones diferenciales; por su parte, Klein aplicó la noción de grupo de transformaciones al estudio de las geometrías y posteriormente inició una serie de investigaciones sobre grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales, que son importantes en el estudio de funciones automorfas.

La famosa conferencia inaugural de Klein en ocasión de su admisión como profesor a la Universidad de Erlangen en 1872, también marcaría un profundo cambio en la concepción de la noción de grupo. En esta conferencia, de título "Resumen Comparativo de Investigaciones Recientes en Geometría", Klein establece lo que sería llamado el Programa de Erlangen, cuyo eje principal era la clasificación de las geometrías (euclidianas y no-euclidianas) como el estudio de invariantes bajo varios grupos de transformaciones. En este programa, Klein introduce varios grupos y sus geometrías asociadas, tales como el grupo proyectivo, el grupo de movimientos rígidos, el grupo hiperbólico, etcétera, creando así una nueva concepción, tanto del concepto de grupo como del de geometría.

Por otra parte, en un artículo publicado en *Mathematische Annalen* en1873 Klein introduce el concepto de grupo de transformaciones en relación con su estudio de las geometrías no-euclidianas. En este artículo, Klein define el concepto de grupo a la manera de Jordan: Si dos transformaciones A y B pertenecen al grupo, entonces su *producto* AB también es un elemento del grupo; en este caso, el producto es composición de funciones. Pero Klein se da cuenta que aparte de la condición de cerradura del producto también requiere que el inverso de cada elemento pertenezca al grupo; esto es, si A es un transformación del grupo, entonces A^{-1}, la transformación inversa de A, también debe pertenecer al grupo.

En este mismo artículo, Klein afirma que cada uno de los métodos de la geometría se caracteriza por un grupo de transformaciones, idea que ya estaba presente en su programa de Erlangen. De acuerdo con este punto de vista, la geometría proyectiva no es otra cosa que el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo transformaciones proyectivas; la geometría euclidiana es estudiar las propiedades invariantes bajo el grupo de desplazamientos euclidianos, las transformaciones de similitud y las reflexiones (el grupo euclidiano), y así sucesivamente.

Por su parte, las ideas de Lie sobre grupos continuos de transformaciones empiezan a tomar forma desde 1870 y lo llevaron a formular lo que ahora se conoce como la Teoría de Lie (Grupos de Lie y Álgebras de Lie), la cual se convirtió en una rama independiente de las matemáticas. Las investigaciones de Lie sobre en este campo fueron publicadas entre 1872 y 1879; sus ideas probaron ser de una fecundidad extraordinaria pues aun hoy, a más de un siglo de distancia, los matemáticos siguen demostrando resultados importantes relacionados con los grupos y álgebras de Lie; además, las aplicaciones de esta teoría son muchas y muy variadas, tanto dentro de las matemáticas como fuera de ellas.

Es imposible hacer un resumen, aunque sea breve, de las ideas de Lie sin recurrir a tecnicismos por lo que comentaremos muy superficialmente parte de su trabajo. Los primeros trabajos de Lie estaban relacionados con la integración de ecuaciones diferenciales parciales; sus investigaciones lo llevaron a considerar grupos de transformaciones que dejaran invariante una ecuación diferencial parcial (simetrías de ecuaciones diferenciales) y pronto pudo darse cuenta que los distintos métodos conocidos en la época para integrar ecuaciones diferenciales eran casos particulares de una teoría general en la que cada ecuación podía integrarse debido a que ésta quedaba invariante bajo la acción de un grupo continuo de transformaciones que, en esos casos, podía ser calculado con facilidad. De esta manera, la intención de Lie era crear una teoría para resolver ecuaciones diferenciales similar a la creada por Galois para las ecuaciones algebraicas. Así, dada una ecuación diferencial, se debería encontrar un grupo de transformaciones que dejara invariante a la ecuación y por medio del estudio de las propiedades del grupo, simplificar la ecuación para resolverla. Si bien no pudo dar una formulación completa de una "teoría de Galois para ecuaciones diferenciales" su trabajo fue fundamental en el desarrollo posterior de la teoría de grupos.

Todas estas investigaciones sobre grupos continuos de transformaciones prepararon el camino para la definición abstracta de grupo pues dieron lugar a una visión más amplia del concepto, se dieron ejemplos de grupos infinitos y extendieron el campo de aplicación de la noción de grupo, la cual estaba presente en algunos desarrollos de la teoría de números, la geometría, ecuaciones diferenciales y la teoría de funciones.

Otros matemáticos que contribuyeron significativamente a la Teoría de los grupos y álgebras de Lie fueron W. Killing, E. Cartan, H.Weyl, E. Dynkin, entre otros muchos.

El paso decisivo que definió la teoría de grupos de forma abstracta fue dado por Arthur Cayley. En 1854 escribió un artículo titulado "*Sobre la teoría de grupos que dependen de la ecuación simbólica* $\theta^n = 1$" en el cual podemos encontrar la primera definición abstracta de un grupo:

> Un conjunto de símbolos 1, α, β, … todos ellos diferentes, y tal que el producto de cualesquiera dos de ellos (no importa en qué orden), o el producto de cualquiera de ellos consigo mismo, pertenece al conjunto, se dice ser un *grupo*.

Como parte de la definición, Cayley establece que el producto de esos símbolos no tiene por qué ser conmutativo, pero sí debe ser asociativo. Cayley presenta varios ejemplos, tales como los cuaternios (con la suma), las matrices invertibles (con la multiplicación de matrices), grupos de permutaciones, etcétera. También muestra que cualquier grupo abstracto e isomorfo a un grupo de permutaciones, lo que ahora llamamos el teorema de Cayley. Introduce la tabla de multiplicación de un grupo y afirma que un grupo abstracto queda determinado por ésta.

A pesar de que Cayley era ampliamente conocido en el ambiente matemático de la época, su definición de grupo no llamó la atención de la comunidad y tuvieron que pasar bastantes años para que el concepto abstracto de grupo empezara a permear a los matemáticos de finales del siglo XIX. De nuevo, fue Cayley quien, en una serie de artículos, llamó la atención sobre el tema. Es oportuno señalar que Cayley estaba inmerso en un ambiente que permitía la abstracción, pues otros matemáticos que dieron definiciones abstractas de grupo fueron R. Dedekind, H. Weber, W. von Dyck.

Es imposible nombrar a todos los que contribuyeron con sus investigaciones al desarrollo moderno de la teoría de grupos. En estas líneas hemos hecho una síntesis de algunas de las líneas principales sobre el tema. Un estudio más completo debería incluir aportaciones importantes de varios matemáticos tales como L. Sylow, E. Mathieu, G. Frobenius. O. Hölder, G. A. Miller, W. Burnside, J.A. de Séguier, Eisenstein, Clebsh, etcétera.

Para terminar esta sección citamos las palabras de H. Wussing (ver [12]): "La teoría de grupos aparece como una disciplina distinta a través de toda la matemática moderna. Permea las áreas más variadas como un principio ordenador y clasificante".

8. LEY DE COMPOSICIÓN: EL CONCEPTO BÁSICO DEL ÁLGEBRA

El concepto primordial, fundamental, en el álgebra contemporánea es el de **operación** o **ley de composición**. Según Bourbaki, el concepto de ley de composición es uno de los conceptos matemáticos que podemos considerar entre los más primitivos. En efecto, una vez que el hombre primitivo tuvo cierta familiaridad con el proceso de contar, el siguiente paso fue sin duda calcular[13]. En todo cálculo intervienen dos ingredientes: los objetos con los que se opera (calcula) y las reglas de operación (las reglas del cálculo). Estas últimas son las que realmente importan pues de los objetos sólo nos interesa que satisfagan las reglas de operación.

Aquí es precisamente donde podemos encontrar la característica principal del álgebra contemporánea: su objeto de estudio son los sistemas algebraicos, entendiendo por éstos un conjunto de objetos en el cual están definidas una o varias leyes de composición que operan entre esos objetos y que satisfacen ciertas reglas (los axiomas) dadas de antemano. Así, la abstracción viene del hecho de que no interesa para nada la naturaleza de los elementos con los que se opera; lo que realmente importa es que se satisfagan los axiomas que definen las operaciones entre dichos elementos.

Es en la escuela inglesa de la segunda mitad del siglo XIX donde se tomaría conciencia del papel totalmente independiente del álgebra. Algunos de los matemáticos ingleses iniciadores de este movimiento son G. Peacock, D. Gregory y A. De Morgan. Por ejemplo, una cita de Gregory con respecto al álgebra simbólica es muy clara al respecto:

> La luz entonces en la cual consideraría al álgebra simbólica es la de que es la ciencia que trata de la combinación de operaciones definidas no por su naturaleza, esto es, por lo que son o por lo que hacen, sino por las leyes de combinación a las que están sujetas..... es verdad que estas leyes han sido en muchos casos sugeridas por las leyes conocidas de las operaciones de números, pero el paso que lleva de álgebra aritmética a álgebra simbólica es que, dejando de lado la naturaleza de las operaciones que los símbolos que usamos representan, nosotros suponemos la existencia de clases de operaciones desconocidas sujetas a las mismas leyes. Es así posible que probemos ciertas relaciones entre las diferentes clases de operaciones las que, cuando se expresan en símbolos, son llamadas teoremas algebraicos.

Estaba así construyéndose el camino hacia la abstracción. Los pasos decisivos hacia la noción abstracta de ley de composición los dan los algebristas de la escuela inglesa, entre 1830 y 1850, a partir de sus reflexiones sobre la naturaleza de los números imaginarios. Inmediatamente se amplían los dominios del álgebra pues se aplica el concepto de ley de composición a una multitud de nuevos entes matemáticos: álgebra de la lógica con Boole; vectores, cuaternios y sistemas complejos generales con Hamilton, y matrices y leyes no asociativas con Cayley.

Como consecuencia de todo ese hervidero de ideas originales y fecundas que vinieron a dar nueva vida al álgebra, se preparaba el camino hacia la generalización y la abstracción. El álgebra ya no sería más el estudio de las ecuaciones y ésta se orienta a lo que hoy consideramos como el problema fundamental del álgebra: el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas. Así, el siglo XX sería testigo de todo un movimiento renovador del álgebra del que surgen nuevas estructuras y teorías algebraicas: la teoría de anillos, la teoría de campos, la teoría de módulos, la teoría de representaciones de grupos y de álgebras, etcétera.

[13] Este proceso debió ser muy largo. Según Dieudonné, aunque las primeras nociones matemáticas tales como el número, el espacio y el tiempo, aunque surgidas de las necesidades prácticas, son de suyo muy abstractas.

Por lo que respecta al nombre **álgebra moderna**, éste se hace popular con la publicación del tratado de B.L. van der Waerden en 1930, *Modern Algebra*, y del cual se puede decir que es el primer texto publicado donde se hace una exposición de manera axiomática de las nuevas ideas y tendencias del álgebra en esa época.

La labor de axiomatización del álgebra se da principalmente en la escuela alemana moderna, comenzando con una unificación de las varias tendencias que se dieron, entre las cuales podemos mencionar los trabajos de Dirichlet, Kummer, Kronecker, Weber, Sylvester, Clifford, Peirce, Dickson, Wedderburn, Weierstrass. Frobenius, Molien, Laguerre y Cartan, entre otros. Esta síntesis fue iniciada por Dedekind y Hilbert en los últimos años del siglo XIX y continuada por E. Steinitz, E. Artin, E. Noether, Hasse, Krull, Schreier, culminando con van der Waerden. El tratado de van der Waerden, publicado en 1930, reunió por primera vez estos trabajos en una exposición de conjunto, abriendo el camino y sirviendo de guía a las múltiples investigaciones posteriores del **álgebra abstracta**.

EPÍLOGO

En este trabajo hemos presentado, de manera sucinta, algunos de los eventos más importantes que a lo largo de la historia de las matemáticas dieron forma a una de sus áreas más importantes: el álgebra moderna. Como se ha visto, en este desarrollo del álgebra han intervenido prácticamente todos los matemáticos importantes que registra la historia de esta disciplina y, aunque no lo hicimos explícito, nos hemos dado cuenta de que la evolución del álgebra no se dió de manera independiente a otras ramas de la matemática. Antes bien, es un proceso de constante retroalimentación en donde el avance de una rama influye en el avance de las otras. Todo esto por continuar esa gran aventura del pensamiento que llamamos MATEMATICAS.

Por último, debo agradecer al Profesor Marco Antonio Valencia Arvizu, editor de estos *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, por animarme a presentar por escrito lo que muy sucintamente presenté en una de las sesiones del Seminario de Historia de las Matemáticas de nuestro departamento, dirigido por él y ya con varios años de estar funcionando. Pero sobre todo, debo agradecerle su paciencia y sus sugerencias en la preparación de este escrito.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Lavrent'ev, M. A., *Mathematics. Its Content, Methods, and Meaning*, The M. I. T. Press, Cambridge, MA. U. S. A., 1969.
[2] Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York, 1991.
[3] Bourbaki, N., *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Editorial, Madrid, 1976.
[4] Cardano, G., *Ars Magna or the Rules of Algebra* (Translated by T. Richard Witmer), Dover Publications, Inc., New York, 1993. (MIT Press, 1968).
[5] Dupuy. P., *La Vie d'Évariste Galois*, Annales de l'École Normale, 13, (1896), pp. 197-266.

[6] Edwards, H. M., *Galois Theory*, Springer, New York, 1984.
[7] Fearnley-Sander, D., *Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra*, The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 10 (Dec. 1979), pp. 809-817.
[8] Fox, R. (editor), *Thomas Harriot. An Elizabethan Man of Science*, Ashgate Publishing Company, 2000.
[9] Grassmann, H., *Teoría de la Extensión*, Traducción de Emilio Oscar Roxín, Espasa Calpe Argentina, S. A., Buenos Aires 1947.
[10] Infeld, L., *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois*, Classics in Mathematics Education, Volume 7, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, U.S.A., 1978.
[11] Johnson, D. B., Mowry, T. A., *Mathematics, a Practical Odissey*, PWS Publishing Company, Boston, 1995.
[12] Kleiner, I., *The Evolution of Group Theory: A Brief Survey*, Mathematics Magazine, Vol. 59, No. 4 (Oct., 1986), pp. 195-215.
[13] Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
[14] Lagrange, J. L., *Réfléxions sur la Résolution des Equations*, Œuvres, Vol. 3, pp. 205-421, Gautier-Villars, París, 1867-1869.
[15] Newman, J. R., *El Mundo de las Matemáticas*, Grijalbo, Barcelona, 1983.
[16] Pycior, H. M., *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements*. *British Algebra through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*, Cambridge University Press, 1997.
[17] Rothman, T., *Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois*, The American Mathematical Monthly, Vol. 89 (1982), pp. 84-106.
[18] Serret, J. A., *Course d'Algèbre*, Paris, 1896.
[19] Smith, D. E., *History of Mathematics*, Volume II, Dover, 1958.
[20] Toti Rigatelli, L., *Évariste Galois. 1811-1832*, Birkhäuser, Berlín, 1996.
[21] Viète, F. *The Analitical Art*, The Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983.
[22] Waerden, B. L. van der, *A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer, Berlín, 1985.
[23] Bourgne, R., Azra, J.-P. *Écrits et Mémoires Mathématiques d'Évariste Galois*, Gautier-Villars, Paris, 1962.
[24] *Œuvres Mathématiques D'Évariste Galois*, Société Mathématique de France, Gauthier-Villars, 1897.
[25] O'Donnell, S. *William Hamilton. Portrait of a Prodigy*, 1983.